



**Titre:** Contribution à l'analyse tridimensionnelle de tolérances en design  
Title: et fabrication

**Auteur:** Romulus Benea  
Author:

**Date:** 2001

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Benea, R. (2001). Contribution à l'analyse tridimensionnelle de tolérances en  
Citation: design et fabrication [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].  
PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/8729/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/8729/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:**  
Advisors:

**Programme:** Non spécifié  
Program:

**UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL**

**CONTRIBUTION À L'ANALYSE TRIDIMENSIONNELLE DE  
TOLÉRANCES EN DESIGN ET FABRICATION**

**ROMULUS BENEÀ  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL**

**MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
MARS 2001**



**National Library  
of Canada**

**Acquisitions and  
Bibliographic Services**

**395 Wellington Street  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

**Bibliothèque nationale  
du Canada**

**Acquisitions et  
services bibliographiques**

**395, rue Wellington  
Ottawa ON K1A 0N4  
Canada**

*Your file Votre référence*

*Our file Notre référence*

**The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.**

**The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.**

**L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.**

**L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.**

**0-612-60886-7**

**Canada**

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé:

CONTRIBUTION À L'ANALYSE TRIDIMENSIONNELLE DE  
TOLÉRANCES EN DESIGN ET FABRICATION

présenté par: BENEA Romulus

en vue de l'obtention du diplôme de: Maîtrise ès sciences appliquées

a été dûment accepté par le jury d'examen constitué de:

M. BALAZINSKI Marek, Ph.D., président

M. FORTIN Clément, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. CLOUTIER Guy, Doctorat, membre et codirecteur de recherche

M. MARANZANA Roland, Doctorat, membre

## RÉSUMÉ

Ce mémoire veut apporter une contribution originale à l'analyse tridimensionnelle des tolérances en design et en fabrication. Nos recherches ont été orientées selon deux directions. La première s'intéresse aux tolérances en fabrication. Le but était de mettre en place des procédures de validation des gammes de fabrication tenant compte des dispersions de fabrication et des erreurs machines-outils, et concerne différents types de tolérances critiques ciblées. La deuxième traite des tolérances en conception, où nous avons proposé une méthode de calcul des tolérances composées permettant d'optimiser une chaîne de tolérances en design.

Après avoir présenté la problématique et les défis dans l'introduction, le premier chapitre fait un état de la recherche en tolérancement. En effet, peu d'éléments issus des travaux de recherche ont pu être utilisés dans notre démarche, que cela soit pour la modélisation ou pour mettre en place les méthodes de calcul.

Le deuxième chapitre débute par une discussion sur les normes. La complexité de leur mise en œuvre est démontrée par les conclusions intéressantes d'une étude effectuée par le LURPA sur des plans de définition dans le domaine de l'aéronautique contenant plusieurs ambiguïtés. Le couplage permanent entre dimensions et tolérances est mis en évidence, et plusieurs types de tolérances sont analysés. Les problèmes de tolérancement en conception et en fabrication sont discutés et synthétisés dans un schéma. Les hypothèses de travail, ainsi que les outils de calcul qui seront ultérieurement employés sont présentés.

Le troisième chapitre traite de l'analyse de tolérances en fabrication, et concrétise notre première direction de recherche. Une modélisation des gammes de fabrication par des chaînes tridimensionnelles complexes contenant les surfaces usinées est proposée. Les

dispersions de procédés prises en compte et les erreurs machines-outils considérées sont présentées avant de définir une méthodologie de calcul où on peut distinguer trois principales étapes : le calcul des matrices de transport, l'analyse de la gamme de fabrication et la métrologie virtuelle. Le graphe de gamme de fabrication proposé est un outil original qui permet d'identifier les boucles de calcul, et tient compte des mises en référence, des dispersions de fabrication et des erreurs machine-outil. Basé sur le calcul formel, nous avons fait une étude de sensibilité qui a permis d'identifier les paramètres essentiels qui influencent les tolérances critiques. Ceci donne des informations extrêmement utiles aux ingénieurs de procédés, leur permettant d'agir efficacement pour respecter les tolérances imposées et réduire les coûts de fabrication. Le code de simulation développé à partir de la méthode est validé sur deux exemples industriels. Pour chacun, à partir d'un modèle CAO obtenu en CATIA on propose une gamme de fabrication et on construit le graphe de gamme associé. Après avoir choisi les paramètres de dispersion et les erreurs machine-outil considérées dans le calcul, on analyse la géométrie obtenue pour chaque phase de fabrication. Les tolérances cibles sont identifiées, et la validation de la gamme se fait à l'aide de calibres virtuels construits pour différents types de tolérances. Les résultats de l'étude de sensibilité permettent d'identifier les paramètres sur lesquels il faut agir pour respecter une contrainte de tolérance.

Le quatrième chapitre correspond à l'autre direction de recherche, et propose une méthode originale de calcul des tolérances composées en design. Les contraintes géométriques entre surfaces sont formalisées en utilisant des torseurs de petit déplacement. Trois types de représentation des zones de tolérances sont mis en évidence à l'aide de plusieurs exemples. On a discuté de l'identification des variables de l'espace des déviations à partir d'une approche cinématique qui associe des liaisons cinématiques aux différentes surfaces considérées. Les polytopes dans l'espace des déviations correspondant à chaque zone de tolérance simple ont servi à bâtir la zone de tolérance

composée dont l'image dans l'espace des déviations et une somme de Minkowski de ces polytopes. Les torseurs résultants sont calculés dans le référentiel attaché à la surface cible, et agissent comme générateurs de perturbations pour cette surface. Ils sont appliqués en plusieurs points remarquables de la surface nominale cible, et les déplacements obtenus sont des points appartenant à la frontière de la zone de tolérance recherchée. Une procédure de type « enveloppe convexe », appliquée sur les polytopes, permet finalement d'obtenir l'image tridimensionnelle de la zone de tolérance composée dans l'espace euclidien. Nous avons défini l'indice de la zone de tolérance, comme le rapport entre les volumes des zones de tolérance composée et respectivement simple. Il fournit une information quantitative sur l'influence des autres tolérances de la chaîne sur la tolérance de la surface cible, et permet de mettre au point une procédure d'optimisation d'une chaîne de tolérances en design. Cette partie du simulateur a été validée sur un exemple où une chaîne de trois tolérances a été considérée.

Les maquettes informatiques furent développées en Mathematica<sup>®</sup>, un logiciel puissant de calcul formel, intégrant des fonctions mathématiques pré-compilées et des possibilités graphiques étendues.

Les méthodes proposées pourraient être considérées à terme comme moteurs de calcul pour des outils de tolérancement assisté par ordinateur. Parmi les limitations, mis à part la nécessité d'interfaces avec des modeleurs CAO existants, on peut citer

- pour le tolérancement en fabrication : le développement des bases de données pour les dispersions de fabrication et les erreurs machines-outils, ainsi que l'automatisation de la procédure de calcul, dont la difficulté provient de la complexité multifactorielle du problème.
- pour le tolérancement en design : les procédures automatiques de calcul de polytopes et de traitement simultané de plusieurs types de tolérances.

## ABSTRACT

This work is an original contribution to the tridimensional analysis of tolerances in design and manufacturing. Our research works were organized along two directions: The first one concerns the manufacturing tolerances, and the goal was to find the process plan validation procedures taking into account the manufacturing deviations and the machine-tool errors, considering different critical tolerances as targets. The second one deals with the design tolerances, where we proposed a computing method for the composite tolerances allowing optimisations within a design tolerance chain.

After introducing the problematic and the challenges, the first chapter reviews the research works in tolerancing. In fact, few elements have been taken out from prior research in order to integrate them in a model or to build a computation method.

The second chapter starts with a discussion on the dimensioning and tolerancing standards, and the difficulties to implement them are displayed by the interesting conclusions from a study carried out by the LURPA on the drafts in aeronautics, where many ambiguities were signalized. The permanent coupling between dimensions and tolerances is highlighted, and several types of tolerances are analyzed. The design tolerancing problems and the manufacturing tolerancing problems are discussed and synthesized in a diagram. The work hypotheses as well as the computation tools, which are used later, are presented.

The third chapter deals with the manufacturing tolerance analysis, and materializes our first research direction. A process plan modeling, using the complex tridimensional chains containing the machined features, is proposed. The process deviations and the machine-tool errors taken into account are presented before defining a three steps computation methodology: the computation of the transport matrices, the process plan



analysis, and the virtual metrology. A process plan graph is proposed, which is an original tool allowing the identification of computation loops, and considering the datum reference features, the process deviations, and the machine-tool errors. Based on symbolical computations we realized a sensitivity study, which yielded the essential parameters having the main influence on the critical tolerances. This is a very useful information for the process planner, giving him the possibility to operate effectively in order to respect the prescribed tolerances, and to reduce the manufacturing costs. The proposed computational prototype is validated on two industrial parts. For each one, starting from a CAD model obtained in CATIA, we proposed a process plan and we built an associated process plan graph. After choosing the deviation parameters and the machine-tool errors considered in the computations, the resultant geometry is analyzed for each process plan phase. The target tolerances are identified, and the process plan validation is performed using the virtual gages built for several tolerance specifications. The results of the sensitivity study allow identifying the predominant parameters, which one has to operate upon in order to respect a tolerance constraint.

The fourth chapter corresponds to our second research direction, and proposes an original computation method for the composed tolerance zones in design. The geometrical constraints between surfaces are formalized using the small displacement torsors. Three representation types of the tolerance zones are displayed using several examples. The identification of the deviation space variables is discussed, from a kinematical approach, where kinematical joints are associated to the surfaces considered. The polytopes in the deviations space, corresponding to each simple tolerance zone, served to build the composite tolerance zone, the image of which, in the deviations space, is a Minkowski sum of these polytopes. The resultant torsors are computed into the reference frame attached to the target surface, and are acting as perturbation generators for this feature. They are applied at several remarkable points belonging to the nominal target surface, and the obtained displacements are the points on the border of

the searched tolerance zone. A "ConvexHull" procedure applied to the polytopes finally obtains a tridimensional image of the composed tolerance zone in Euclidean space. We also defined the tolerance zone index, as the ratio between the volumes of the composite tolerance zone and the simple tolerance zone respectively. This index supplies a quantitative information about the influence of the other tolerances composing the chain, on the tolerance of the target feature. It also allows defining an optimization procedure for a design tolerance chain. This method was validated on an example where a three tolerances chain was considered.

The models were validated by software programs developed in Mathematica®, an environment providing symbolical computations, pre-compiled mathematical functions, and extended graphical capabilities.

The proposed methods could be considered as computation engines for computer aided tolerancing tools. Among limitations, apart the need for interfaces with the actual CAD modelers, we mention

- for the manufacturing tolerancing: developing the data bases for the process deviations and the machine-tool errors, as well as the automation of the computation modules, the difficulty of which lies in the multi factorial complexity of the problem.
- for the designing tolerancing: the automatic procedures for the computation of polytopes, and simultaneously processing several tolerance specifications.

## TABLE DES MATIÈRES

<b>RÉSUMÉ .....</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>vii</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES .....</b>	<b>x</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX .....</b>	<b>xiv</b>
<b>LISTE DES FIGURES .....</b>	<b>xv</b>
<b>LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS.....</b>	<b>xvii</b>
<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1 : ÉTAT DE LA RECHERCHE EN TOLÉRANCEMENT .....</b>	<b>4</b>
1.1   Références utilisées dans nos recherches.....	4
1.2   Autres références remarquables.....	10
1.3   Tolérancement assisté par ordinateur .....	19
<b>CHAPITRE 2 : PROBLÉMATIQUE ET OUTILS D'ANALYSE .....</b>	<b>22</b>
2.1   Discussion sur les normes .....	22
2.2   Dimensions et tolérances .....	25
2.2.1 Un couplage permanent.....	26
2.2.2 Dimensionnement.....	28
2.2.3 Tolérancement .....	30

2.2.3.1	Tolérancement paramétrique et géométrique .....	30
2.2.3.2	Tolérancement en conception et fabrication .....	31
2.3	Problèmes de tolérancement .....	32
2.4	Outils d'analyse .....	35
2.4.1	Les torseurs de petits déplacements .....	35
2.4.2	Paramètres et matrices de transport .....	38
2.4.3	Modélisation de surfaces .....	40
<b>CHAPITRE 3 : ANALYSE DE TOLÉRANCES EN FABRICATION .....</b>		<b>42</b>
3.1	Modélisation des procédés .....	43
3.1.1	Erreurs cinématiques des machines-outils .....	45
3.1.2	Dispersion de procédés .....	46
3.2	Méthodologie de calcul .....	47
3.3	Graphe de gamme de fabrication .....	48
3.4	Application sur des exemples industriels .....	50
3.4.1	Premier exemple industriel .....	51
3.4.1.1	Analyse de gamme (ex. 1) .....	52
3.4.1.2	Paramètres de dispersion et matrices de transport .....	54
3.4.1.3	Analyse des phases de fabrication .....	55
3.4.1.4	Analyse de tolérances .....	58
3.4.1.5	Analyse de sensibilité .....	64
3.4.2	Deuxième exemple industriel .....	69
3.4.2.1	Analyse de gamme (ex. 2) .....	70

3.4.2.2	Dispersions et matrices de transport.....	72
3.4.2.3	Analyse de tolérances.....	73
3.4.2.4	Analyse de sensibilité.....	75
<b>CHAPITRE 4 : ANALYSE DE TOLÉRANCES EN CONCEPTION.....</b>		<b>77</b>
4.1	Contraintes entre surfaces.....	77
4.1.1	Contraintes géométriques et de contact.....	77
4.1.2	Contraintes d'assemblage .....	81
4.2	Représentation des zones de tolérance .....	81
4.2.1	Modes de représentation.....	82
4.2.2	Exemples de représentations des zones de tolérance .....	83
4.2.3	Variables de l'espace de déviation.....	86
4.3	Polytopes .....	87
4.3.1	Somme de polytopes .....	88
4.3.2	Calcul du « convex hull ».....	89
4.4	Calcul de la zone de tolérance composée .....	90
4.4.1	Indice de zone de tolérance .....	90
4.4.2	Méthode de calcul de la ZTC .....	91
4.5	Application sur un exemple.....	95
4.5.1	Identification des tolérances et matrices de transport.....	97
4.5.2	Polytopes dans l'espace de déviation.....	99
4.5.3	Combinaison de polytopes et torseurs résultants .....	99
4.5.4	Calcul de la zone de tolérance composée.....	100

<b>CONCLUSION</b> .....	103
-------------------------	-----

<b>RÉFÉRENCES</b> .....	105
-------------------------	-----

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1: Les contraintes de positionnement relatif .....	41
Tableau 3.1: Paramètres DH (ex. 1) .....	54
Tableau 3.2: Paramètres DH (ex. 2) .....	73

## LISTE DES FIGURES

Figure 2.1: Les problèmes de tolérancement en conception et fabrication.....	34
Figure 2.2: Le transfert des TPD .....	36
Figure 2.3: Les paramètres de Denavit-Hartenberg Hayati .....	38
Figure 2.4: Surfaces de substitution .....	40
Figure 3.1: Chaînes complexes contenant les surfaces usinées .....	42
Figure 3.2: Exemple d'erreurs de forme.....	44
Figure 3.3: Erreurs cinématiques machine-outil.....	46
Figure 3.4: Dispersions de fabrication dans un graphe de gamme .....	49
Figure 3.5: Vue isométrique et dessins de définition (ex. 1).....	51
Figure 3.6: Schéma synthétique de la gamme de fabrication (ex. 1).....	52
Figure 3.7: Graphe de gamme incluant uniquement les spécifications critiques (ex. 1) .	53
Figure 3.8: Surfaces obtenues dans les phases de tournage.....	55
Figure 3.9: Phase de perçage et alésage.....	56
Figure 3.10: Phase de fraisage .....	57
Figure 3.11: Validation de la tolérance de position composée (ex. 1) .....	63
Figure 3.12: Sensibilité de la tolérance dimensionnelle .....	66
Figure 3.13: Sensibilité de la tolérance d'orientation .....	66
Figure 3.14: Sensibilité de tolérance de position, $Dev = f(\alpha_1, \alpha_2)$ .....	67
Figure 3.15: Sensibilité de tolérance de position, $Dev = f(a_1, a_2)$ .....	68
Figure 3.16: Sensibilité de tolérance de position (phase 1) .....	68
Figure 3.17: Sensibilité de tolérance de position (phase 2) .....	69
Figure 3.18: Vue isométrique (ex. 2).....	70
Figure 3.19: Dessins de définition (ex. 2) .....	70
Figure 3.20: Schéma synthétique de la gamme de fabrication (ex. 2).....	71
Figure 3.21: Graphe de gamme présentant uniquement les spécifications cible (ex. 2)..	72
Figure 3.22: Tolérance de position $t_4$ (ex. 2) .....	74



Figure 3.23: Tolérance de position composée t5 (ex. 2).....	75
Figure 3.24: Sensibilité de tolérance dimensionnelle (ex. 2) .....	76
Figure 4.1: Contrainte géométrique associée à $S_1$ .....	78
Figure 4.2: Contrainte de contact entre deux plans .....	80
Figure 4.3: Graphe d'assemblage.....	81
Figure 4.4: Tolérance géométrique d'un cylindre par rapport à un plan .....	83
Figure 4.5: Tolérance de position pour un plan.....	84
Figure 4.6: Tolérance de position entre deux cylindres.....	85
Figure 4.7: Méthode de calcul des zones de tolérance composée .....	93
Figure 4.8: Traitement de plusieurs types de zones de tolérance .....	94
Figure 4.9: Gabarit (Exemple pour le calcul d'une ZTC) .....	96
Figure 4.10: Dessins de définition de la pièce.....	96
Figure 4.11: Première surface (plan): Tolérance de position.....	98
Figure 4.12: Deuxième surface (plan): Tolérance d'orientation .....	98
Figure 4.13: Troisième surface (cylindre): Tolérance de perpendicularité.....	98
Figure 4.14: Plan inférieur de la ZTC.....	100
Figure 4.15: Plan supérieur de la ZTC.....	100
Figure 4.16: Points équidist. (contour inf.).....	101
Figure 4.17: Points équidist. (contour sup.).....	101
Figure 4.18: Image 3D de la ZTC.....	102
Figure 4.19: Section de la ZTC .....	102

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

- $\times$  : symbole du produit vectoriel
- $\mathbf{a}$  : vecteur  $\mathbf{a}$
- $\mathbf{A}$  : matrice  $\mathbf{A}$
- $\mathbf{I}_k$  : matrice identité d'ordre  $k$
- $\mathbf{O}_k$  : matrice nulle d'ordre  $k$
- $R_0$  : référentiel  $R_0$
- $\mathbf{R}_{01}$  : matrice de rotation tournant  $R_0$  en  $R_1$
- $\mathbf{p}_{01}$  : vecteur de position  $\mathbf{O}_0\mathbf{O}_1$
- $\mathbf{T}_{01}$  : matrice de transformation homogène déplaçant  $R_0$  en  $R_1$
- $\mathbf{C}_{01}$  : matrice 6x6 de transport des torseurs
- $\mathbf{DH}$  : matrice de transport de Denavit-Hartenberg
- $\mathbf{DHH}$  : matrice de transport de Denavit-Hartenberg-Hayati
- $[\mathbf{p}]$  : matrice antisymétrique de préproduit vectoriel, associée au vecteur  $\mathbf{p}$
- $\{\tau\}_{O,R}$  : torseur de petit déplacement défini dans le repère  $R$ , au point  $O$
- $\mathbf{t}$  : vecteur de petites translations,  $\mathbf{t} = [u, v, w]^T$
- $\omega$  : vecteur de petites rotations,  $\omega = [\alpha, \beta, \gamma]^T$
- ZT : zone de tolérance (simple)
- ZTC : zone de tolérance composée
- Dev : dispersions de procédés
- SATT : Surfaces Associées Technologiquement et Topologiquement
- EGRM : Éléments Géométriques de Référence Minimum
- MER : Mise En Référence

## INTRODUCTION

Le dimensionnement et le tolérancement géométrique sont essentiels pour définir une pièce de qualité qui assure sa fonctionnalité dans un mécanisme ou un sous-ensemble mécanique. La détermination des tolérances géométriques des pièces en conception mécanique demeure un problème important et non résolu. Le respect de ces tolérances en fabrication constitue un enjeu tout aussi important et difficile à mettre en œuvre dans les restrictions de coût imposées.

En effet, il n'existe pas de méthode systématique qui permette de déterminer les limites admissibles de la géométrie des pièces fabriquées en concordance avec les exigences du cahier des charges du système assemblé. À part quelques techniques basées sur la notion de chaînes de cotes unidimensionnelles, les tolérances dimensionnelles et géométriques utilisées par le Bureau d'étude font appel à l'expérience des ingénieurs, et des modifications sont souvent nécessaires dans la phase de mise au point avant d'obtenir des tolérances satisfaisantes. Patrick Letellier, chargé des processus de développement mécaniques auprès de la direction de la mécanique de Renault, témoigne [IND 99] : « D'un constructeur à un autre, à fonction identique, les tolérances varient dans de fortes proportions, sans raison apparente. » Cela est contraire à une démarche qualité, pour laquelle il est nécessaire de définir des procédures précises qui conduisent à des choix importants, choix qui engagent le mode de fabrication et le prix de revient des pièces. Sans tolérancement optimal, on risque soit d'augmenter les coûts de fabrication par des tolérances trop sévères ou mal placées, soit de produire des pièces qui ne conviendront pas dans l'assemblage ou encore des assemblages peu fiables en fonctionnement.

La numérisation de la chaîne de conception-fabrication-contrôle est pratiquement achevée, mais cela ne signifie pas qu'elle soit satisfaisante à tout point de vue. Le développement de nouveaux systèmes de CAO/FAO, intégrant la représentation

géométrique qui engendrent la cotation et les trajets d'usinage permettant des calculs d'éléments finis et d'optimisation, nécessite la prise en compte de ces aspects de tolérancement. Il existe donc un besoin d'outils de tolérancement potentiellement intégrables dans les systèmes CAO, qui reprennent les principes des spécifications classiques, respectent les normes et s'adaptent aux exigences actuelles.

À chaque étape, conception, fabrication ou inspection, le choix d'une spécification de tolérance adéquate forme un ingrédient important dans tout projet d'ingénierie. Généralement, on distingue deux problèmes : l'analyse et la synthèse des tolérances. L'analyse de tolérances permet de vérifier le bon fonctionnement d'un assemblage après avoir défini les tolérances, la synthèse de tolérances devant permettre de compléter les spécifications des tolérances prenant en compte les aspects de fabrication et de contrôle, et devant également fournir des outils d'optimisation pour l'allocation des tolérances.

En dépit des efforts faits par les standards de dimensionnement et tolérancement, une spécification complète de tolérances est à ce jour rarement univoque, et cause des interprétations subjectives pour les intervenants du cycle de production. Afin de palier ces inconvénients, de grandes compagnies ont introduit des standards internes. Souvent des concepteurs chevronnés donnent des solutions différentes à un même problème de tolérancement. Laquelle est la meilleure ? Comment les quantifier et quels critères doit-on utiliser ?

Voilà des questions en attente de réponses dans un domaine où il faut trouver le meilleur compromis afin de faire émerger sur le marché un produit compétitif de qualité, à un prix convenable et dans les meilleurs délais.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres. Le premier présente l'état des recherches et mentionne les travaux d'intérêt utilisés dans notre travail de développement, ainsi que

d'autres publications remarquables. Le deuxième chapitre présente les problèmes de tolérancement en design et en fabrication. Le couplage permanent entre dimensions et tolérances est mis en évidence. Quelques réflexions sur la norme et les outils d'analyse viennent compléter ce chapitre. L'analyse de tolérances en fabrication forme le sujet du troisième chapitre. On y présente une modélisation du processus de fabrication, l'utilisation d'un graphe de gamme et la méthodologie de calcul. La méthode proposée est explicitée sur deux exemples industriels. Le quatrième chapitre traite du problème du tolérancement en conception. On y discute de la modélisation des spécifications de tolérances et de l'évaluation des zones de tolérances composées. Une méthode numérique de calcul utilisant les « enveloppes convexes » est proposée et explicitée sur un exemple.

## **CHAPITRE 1**

### **ÉTAT DE LA RECHERCHE EN TOLÉRANCEMENT**

Notons que la plupart des recherches en dimensionnement et tolérancement s'associent aux standards y inclus et dont les faiblesses, notamment concernant les tolérances géométriques, sont mises en évidence. Les modèles utilisés par les chercheurs proposent généralement une alternative aux normes, tout en essayant de se rapprocher le plus possible des spécifications normalisées et conservant le souci d'un potentiel d'intégration dans les outils CAO/FAO.

Dans ce chapitre, on présente d'abord les travaux de recherches ayant alimenté nos concepts, nos représentations ou certains de nos outils de calcul. Suivent d'autres travaux de recherche, considérés importants pour certaines idées et pour le développement futur dans ce domaine. Finalement, quelques outils de tolérancement assisté par ordinateur (CAT) sont revus.

#### **1.1 Références utilisées dans nos recherches**

Nous avons essentiellement utilisé une approche développée par l'école française, dont des représentants comme A. Clément ou P. Bourdet sont mondialement connus. Très peu de travaux de recherche s'intéressent à l'influence des dispersions des procédés et des erreurs des machines-outils sur le respect des tolérances en fabrication. Dès les années 70, P. Bourdet a mis en cause la validité des analyses unidimensionnelles du « pire cas », basées sur la supposition des dimensions intra-pièce statistiquement indépendantes [BOU 73], [BOU 75]. Cette hypothèse reste valable pour une analyse de tolérances d'un assemblage, où les pièces sont usinées dans différentes conditions et sur plusieurs machines outils. Généralement, elle ne tient plus dans le cas d'une analyse de gamme associée à une seule pièce, où des variables statistiquement indépendantes entre surfaces

produisent des dimensions statistiquement dépendantes entre les paires de surfaces. On ne peut ainsi pronostiquer la variance d'une dimension résultante comme somme des variances des composantes, sans tenir compte de la covariance. Une analyse, même du pire cas, devrait prendre en compte cette dépendance. La méthode d'analyse de gamme développée par Bourdet a pénétré avec succès des Écoles d'ingénierie en France et des entreprises manufacturières en Europe.

Nous enrichissons cette approche par la prise en compte de la cinématique machine outil avec les erreurs associées et leur propagation sur les surfaces usinées. Nous proposons le graphe de gamme, un outil qui permet également de réaliser des analyses tridimensionnelles de tolérances en utilisant les torseurs de dispersion de procédés.

A. Rivière [RIV93] propose dans sa thèse une modélisation du tolérancement fonctionnel de mécanismes, c'est-à-dire une modélisation géométrique des pièces mécaniques qui intègre les limites des défauts géométriques issues des tolérances des pièces fabriquées. Ce modèle devrait permettre d'effectuer des calculs de simulation dans la phase de design, pour vérifier ou garantir le bon fonctionnement d'un mécanisme ; mais il devrait aussi être pertinent pour la fabrication et l'inspection. Le concept de SATT (Surfaces Associées Technologiquement et Topologiquement) constitue l'élément central de cette modélisation. L'ensemble des SATT, qui possède la structure algébrique de groupe de dimension finie, peut être structuré par un critère d'invariance qui correspond à la nature du déplacement laissant invariante la surface ou le SATT considéré. À partir des sept sous-groupes de base, en utilisant les lois de composition interne, il a mis en évidence les 28 cas de dimensionnement et les 44 cas de tolérancement obtenus après reclassement. Le modèle mathématique général des différents types de tolérancement reposait sur un torseur de tolérancement. Celui-ci correspond à un petit déplacement du SATT par rapport à lui-même pour les tolérances de forme et de dimension, ou au petit déplacement d'un SATT par rapport à un autre

SATT pour les tolérances de position. Pour chaque association de surfaces, celles-ci définissent un repère complet ou partiel, et se nomment donc à juste titre *Élément Géométrique de Référence Minimum* (EGRM). Traitant de façon systématique les 44 cas de tolérancement, il précise pour chacun le torseur de tolérancement et l'EGRM associé. Ce modèle de représentation fut appliqué à un mécanisme, et validé sur une maquette informatique. Il permet de conserver et de manipuler les relations de positionnement relatif, et fournit une association de surfaces fonctionnelles pour le concepteur, une association des surfaces outils pour le fabricant et une association des surfaces-palpeur pour le contrôleur. On mentionne les principales applications envisageables de ce modèle, comme le calcul automatique des cotes moyennes en FAO, le transfert de cotes, le calcul automatique des dimensions de gabarits de contrôle, l'assistance à la génération de gammes de fabrication ou de gammes de contrôle.

Les concepts de base de cette thèse que nous mettons à profit dans notre propre modélisation concernent la position relative de deux surfaces, l'étude générale de déplacements, ainsi que l'étude de déplacements qui laisse une surface invariante. L'association de surfaces et la présentation en annexe des 44 cas de tolérancement sert également.

D. Gaunet [GAU 93] utilise une approche vectorielle. Elle repose sur les travaux de A. Clément [CLE 91] concernant les SATT associées aux torseurs de petits déplacements (TPD), eux-mêmes proposés par P. Bourdet et A. Clément [BOU 88] comme outils de calcul des petits déplacements en métrologie. Les TPD servent au calcul de l'écart entre la surface nominale et la surface de substitution, ainsi qu'à la modélisation des spécifications et des zones de tolérance. Ce modèle introduit également un échantillonnage ponctuel des surfaces nominales, mais sans en préciser la méthode.



A. Clément *et al* [CLE 97] ont synthétisé les 13 contraintes de positionnement relatif aux Éléments Géométriques de Référence Minimum (EGRM) associés aux SATT. Ils remarquent l'importance pour les concepteurs d'être en mesure d'utiliser un dimensionnement et un tolérancement fonctionnels pour des classes de pièces mécaniques, indépendamment des situations particulières. Le modèle proposé déclare une association des surfaces fonctionnelles, et définit des contraintes entre les EGRM venant préciser leur position relative. Ce modèle déclaratif et explicite de tolérancement concorde avec la partie 47 de STEP, et sa robustesse résulte de sa structure de groupe algébrique appliquée à une association de surfaces d'où découlent les contraintes géométriques nécessaires et suffisantes pour le positionnement relatif. Il s'applique aux problèmes de tolérancement et, de façon plus générale, en conception, fabrication et contrôle des pièces mécaniques.

À notre tour, nous misons sur ces concepts de SATT et EGRM, ainsi que sur l'outil de TPD et les hypothèses associées au calcul en tolérancement. Notre modèle cinématique pour l'analyse de tolérances en fabrication exploite en validation des résultats d'études expérimentales de A. Kosilova et al [KOS 85]. L'auteur présente ces résultats sur la précision d'usinage dans différentes conditions de travail et pour plusieurs types de pièces brutes, sur les dispersions de mise en référence, sur les écarts d'usinage, surépaisseurs d'usinage, etc. Des études sur les machines-outils courantes, sur les gammes d'usinage et sur la qualité de la surface des pièces mécaniques complètent la présentation.

Nous puisons également des données expérimentales sur plusieurs types d'erreurs cinématiques des machines-outils dans des articles de recherche [PAH 97]. Ces données s'assemblent en une base de données primaire qui contient des dispersions de positionnement, de fabrication et des erreurs machine-outil, permettant de valider les maquettes ou modèles proposés.

Basé sur l'étude du tolérancement des mécanismes par chaînes de cotes, M. Giordano et D. Duret [GIO 93] ont suggéré de modéliser les conditions fonctionnelles et les écarts admissibles, par des volumes dans l'espace des petits déplacements qu'ils ont nommés « espace jeu ». Les liaisons entre les pièces sont classées en deux catégories, série et parallèles, et les opérateurs topologiques de composition de volumes, somme et intersection, sont définis.

M. Giordano, E. Pairel et S. Samper [GIO 99] introduisent une définition originale des zones de tolérances, légèrement différente des normes ISO, mais qui conduit à un modèle sans ambiguïtés. Ils définissent des inégalités dans l'espace de déviation (ou « espace jeu ») représentant les déplacements relatifs admissibles par rapport aux positions nominales. Il en découle des équations définissant les frontières des zones de tolérance, dont quelques propriétés comme la symétrie ou la transitivité ont été investiguées. Cette représentation mathématique des zones de tolérances traduit des concepts normés comme la tolérance projetée ou la condition de maximum de matière et s'ouvre à l'analyse des tolérances de mécanismes. Notons que le nombre d'inégalités augmente rapidement avec le nombre de pièces (ou de « features » enchaînés), entraînant des difficultés pour résoudre le système d'inéquations engendrées.

La méthode de traitement des tolérances dans « l'espace de déviation », l'approche cinématique permettant de calculer les variables dans l'espace de déviation, ainsi que les modes de représentation des zones des tolérances forment des concepts importants de ces travaux, concepts repris et utilisé dans nos propres calculs de la zone de tolérance composée en design.

A. Desrochers et A. Rivière [DES 97] ont aussi recours à ces « espace jeu », eux qui s'engagent dans une approche matricielle avec contraintes pour représenter les zones de tolérance dans un système CFAO. Cette méthode analyse d'abord les déplacements

invariants associés aux différentes spécifications de tolérance en utilisant les transformations homogènes. Un ensemble d'inégalités complète la représentation. Celles-ci définissent les frontières des zones de tolérance. La définition du modèle et sa génération permettraient de représenter l'espace jeu et de calculer le transfert de tolérances.

Dans sa thèse, E. Ballot [BAL 95] approfondit les lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement. Ces travaux cherchaient à mettre au point un modèle qui formalise ces comportements, prenant en compte les couplages mis en évidence entre les défauts, et à établir une formulation mathématique des spécifications géométriques. La description des petits déplacements de chaque élément du modèle utilise quatre types des torseurs de petit déplacement (TPD) : le torseur écart, défaut, jeu et pièce. Il utilise deux opérateurs : l'opérateur intersection des domaines d'écart, utilisé pour calculer la forme des torseurs jeu et donnant une condition nécessaire pour valider une pièce, et l'opérateur union des chaînes de positionnement qui détermine le déplacement résultant des défauts de l'ensemble des liaisons. La détermination systématique de l'ensemble des configurations extrêmes pour un mécanisme sert à valider les résultats permettant de balayer l'ensemble des possibilités de cotation, tout en limitant la sélection à celles qui s'avèrent pertinentes. On obtient une procédure d'écriture automatique des chaînes comportant uniquement les composantes des défauts à spécifier. On arrive finalement à construire des polyèdres convexes dans l'espace des défauts pour représenter les tolérances géométriques. Cette définition mathématique des tolérances autorise la formulation des questions du tolérancement sur une nouvelle base théorique et avec l'appui de méthodes algébriques. On mentionne finalement de nouvelles perspectives de développement et de recherche engendrées par cette approche :

- La mise au point d'une liaison avec un modeleur géométrique.
- L'enrichissement du modèle avec l'intégration des effets des défauts de forme et l'utilisation d'un modèle au deuxième ordre.

- La transposition des spécifications mathématiques sous la forme des spécifications normalisées qui devront être portées sur les dessins de définition.

Dans sa thèse, il représente les tolérances par des polyèdres convexes et détermine systématiquement des configurations extrêmes, ce que nous utilisons pour l'évaluation des zones de tolérances composées.

D. Teissandier *et al.* [TEI 99] exploitent aussi les polytopes pour résoudre des problèmes d'analyse de tolérances par une méthode numérique. Une spécification géométrique, de contact ou des exigences fonctionnelles donnent lieu à un ensemble fini d'inéquations linéaires dans un hyperplan définissant des  $n$ -polytopes. La position relative des surfaces se calcule en appliquant des opérateurs aux polytopes, comme la somme et l'intersection de Minkowski. Il en résulte un polytope calculé devant être comparé à celui engendré par les contraintes fonctionnelles. Les auteurs n'ont pas explicitement défini la méthode de calcul et ont omis des applications sur des exemples.

## 1.2 Autres références remarquables

La deuxième partie de ce chapitre survole d'autres travaux de recherche intéressants, même si nous n'avons pas utilisé directement leurs résultats.

Un des pionniers de la recherche en tolérancement basée sur les modeleurs solides est A. Requicha [REQ 77], [REQ 86] de l'Université de Rochester. Il a implémenté dans PADL-1, un modelleur solide CSG, l'usage des dimensions dans la définition des objets et a mis en place des procédures automatiques de génération des dessins de définition. À partir de ces concepts, plusieurs chercheurs ont exploré cette voie en étudiant différents aspects et les implications de son intégration dans les systèmes CAO/FAO selon quatre directions :

- la représentation des dimensions et tolérances

- l'analyse et la synthèse des dimensions et tolérances
- le contrôle des tolérances durant les phases de fabrication
- les implications du dimensionnement et tolérancement dans les activités en aval de la FAO

Par la suite, Requicha [REQ 84], [REQ 86] a développé une théorie basée sur le concept de « classes variationnelles ». Il s'agit de familles d'objets similaires à un objet nominal, fonctionnellement équivalentes et interchangeables dans un assemblage. La zone de tolérance se construit par décalage (« offsetting »). Mentionnons que cette approche ne permet pas de modéliser correctement plusieurs spécifications, notamment celles de position, comme le soulignait L. Farmer [FAR 86].

Un premier modèle par surfaces de substitution a été proposé par R. Hillyard [HIL 78], basé sur une approche cinématique de la cotation pour déplacer les sommets de polygones plans. La déformation du solide est exprimée par une matrice de rigidité, mais ce modèle ne peut pas intégrer les exigences du tolérancement et le calcul des cas tridimensionnels.

J. Turner [TUR 87] a exploité un modèle similaire qui repose sur un modèle paramétrique GEOTOL, permettant de spécifier les défauts de position et orientation relatifs à chaque surface. Il expose ultérieurement [TUR 93] une modélisation des défauts de forme basée sur un maillage de la surface et le déplacement de ses sommets. Malgré un calcul laborieux, le modèle reste assez éloigné des défauts de forme réels des pièces et de la norme.

Jayaraman [JAY 89] et Srinivasan [SRI 89] ont développé VBR (Virtual Boundary Requirements), une approche cherchant à traduire sous une forme mathématique le tolérancement géométrique. Celle-ci se sert du principe de l'existence des bornes

virtuelles. À chaque surface frontière on associe un solide ou un demi-espace et des opérateurs de décalage, permettant une généralisation des exigences de cotation au maximum et au minimum de matière. Cette modélisation convient surtout à l'assemblage car elle ne prend en compte que l'exigence de l'enveloppe.

Une revue étendue de la littérature est faite par U. Roy, C. R. Liu et T. C. Woo [ROY 91] dans *Computer-Aided Design*. Ils présentent l'état du savoir-faire dans les techniques de représentation, manipulation, et analyse des dimensions et tolérances dans les systèmes CAO/FAO. Ils discutent les modèles solides et variationnels et leur implémentation dans les systèmes CAO/FAO. Regroupés en quatre sections, les sujets couvrent les catégories suivantes :

- a) représentations en dimensionnement et tolérancement
- b) synthèse et analyse des dimensions et tolérances
- c) contrôle des tolérances
- d) implications du dimensionnement et tolérancement dans la FAO

Ils ont mentionné la nécessité d'optimiser les tolérances de fabrication tout en respectant les contraintes fonctionnelles de design, ainsi que d'employer des bases de données communes permettant la mise au point des procédures automatiques de contrôle. La conclusion expose les directions de recherche pour ce domaine. Les modeleurs solides devront supporter des entités géométriques de bas et haut niveaux (« features ») et les fondements mathématiques du tolérancement devront être développés et structurés indépendamment des systèmes CAO.

Une approche cinématique du tolérancement est proposée par L. Rivest et C Fortin [RIV 93]. Ce modèle utilise une chaîne cinématique générique afin de prendre en compte le type et le positionnement d'une zone de tolérance. La liaison utilise un assemblage série de 14 joints pivot et glissière. Un ensemble de 14 paramètres particuliers qui sont bloqués, bornés ou laissés libres suivant le cas étudié modélise

chaque spécification, engendrant ainsi une complexité assez importante.

L'analyse de tolérances afin de valider les gammes de fabrication a été abordée par L. Rivest, E. Dupinet, C. Fortin et C. Morel [RIV 94]. Ils distinguent deux catégories de méthodes, celles basées sur les spécifications de tolérances du produit (analyse descendante) et celles faisant intervenir les capacités et les dispersions de fabrication pour une gamme donnée (analyse ascendante). La même approche cinématique a été employée pour traiter le transfert de tolérances, une formulation qui peut être utilisée pour les deux types d'analyse.

A. Wirtz [WIR 89] a choisi une voie particulière en proposant le tolérancement vectoriel. Dans cette approche, toute surface est positionnée par un point et un vecteur dans un système de référence. Quatre vecteurs indépendants définissent la position, l'orientation, la forme et la dimension de l'objet. Deux paramètres, un pour la forme nominale et l'autre pour sa déviation, sont associés à chacune de ces variables. Les opérations vectorielles servent à définir la surface réelle. Pour vérifier les pièces, il faut définir pour chacune un repère « réel » non-ambigu et un opérateur entre ce repère et un repère de contrôle. Cette description a l'avantage de permettre une liaison entre les défauts des surfaces et leur fabrication, prenant en compte, par exemple, la dégénérescence d'un cylindre en cône. Ce modèle s'éloigne beaucoup de normes, et l'auteur le présente comme une alternative à celles-ci.

Etesami [ETE 93] a développé un langage spécifique pour le tolérancement (TSL) basé sur les définitions à interprétation unique sans classification des types de tolérances ni restrictions sur l'usage des types « feature ». En TSL, les références aux tolérances s'appliquent aux éléments « surface » et génèrent des zones de tolérance uniformes en faisant appel aux pièces nominales et réelles.

D. Whitney et O. Gilbert [WHI 93] ont exposé une représentation des tolérances pour les assemblages à l'aide d'un algorithme utilisé en robotique. Ceci permet d'interpréter les tolérances standards à l'aide de transformations matricielles homogènes caractérisant les relations entre des géométries nominales et les variations permises par les tolérances. L'analyse offre une estimation statistique de la position d'une certaine pièce à partir de la fixation. Ils se servent de l'hypothèse d'une distribution normale dans l'espace de déviations et le schéma d'optimisation 2D est supposé équivalent en 3D. Ils affirment que la plupart des tolérances, à l'exception de celles de forme, sont compatibles avec cette représentation qui pourrait également être intégrée dans les systèmes CAO.

A. Clément, A. Rivière et P. Serré [CLE 95] présentent un modèle d'information déclarative pour des exigences fonctionnelles, permettant aux concepteurs de spécifier les contraintes de façon univoque. Le modèle repose sur les SATT, les EGRM et les pseudo-SATT (surfaces associées aux plusieurs pièces). Ils mentionnent les sept classes de SATT, une combinaison de 28 classes de dimensionnement et 44 cas de tolérancement après reclassement. Trois exemples concernant le design et l'assemblage exposent la représentation des informations du modèle, en utilisant le langage EXPRESS et EXPRESS-G.

K. Chase *et al.* [CHA 96] se servent d'une méthode de linéarisation directe (DLM) pour l'analyse des tolérances des assemblages. À partir des définitions des tolérances géométriques [ASME 94], ils ont modélisé plusieurs types de spécifications. Ces dernières sont manipulées avec la méthode DLM à l'aide d'une boucle vectorielle fermée, avec contraintes représentées par des transformations matricielles homogènes. Les effets des tolérances géométriques associées aux différents types de joints cinématiques s'assimilent à des petits mouvements de translation ou de rotation. Les tolérances géométriques et les degrés de liberté associés pour différents types de joint cinématiques sont analysées. Dans l'équation matricielle de la chaîne, une matrice de



transfert est associée à chaque joint. Les tolérances géométriques sont traitées comme des vecteurs de longueur nulle possédant des degrés de liberté dans les directions permises. DLM exprime finalement la variation du jeu dans un assemblage en fonction des variables d'usinage et d'assemblage.

L. Mathieu, A. Clément et P. Bourdet [MAT 97] ont passé en revue les hypothèses actuelles dans la modélisation, la représentation, le calcul et l'inspection de tolérances. Ils remarquent que l'exploitation accrue des systèmes intégrés de CFAO entraîne le développement de techniques sophistiquées en tolérancement et ils mentionnent plus de 200 références entre 1988 et 1997. Dans cet article de référence, ils analysent la notion de distance et la paramétrisation géométrique, et présentent le tolérancement paramétrique et géométrique, ainsi que l'importance du tolérancement fonctionnel. Une section importante est dédiée aux normes actuelles et aux tendances suggérées par les recherches en cours. En conclusion, on souligne l'intérêt constant des manufacturiers de bénéficier d'outils et de méthodes d'inspection basées sur des modèles assurant la consistance des spécifications de tolérance à tous les niveaux. Par exemple, les spécifications de tolérances géométriques devraient être fonctionnelles et univoques, traiter la macro et la micro géométrie et permettre une métrologie des tolérances avec évaluation des incertitudes. On mentionne que le langage Geospelling, proposé par la délégation française à la réunion ISO en 1997 et présenté brièvement dans cet article, pourrait répondre à une bonne partie de ces exigences.

V. Srinivasan [SRI 97] expose l'évolution du concept des tolérances statistiques et les étapes de son adoption par ISO. Cette mesure est une résultante des intérêts des industriels, et cela a plusieurs raisons. La première est reliée aux coûts, parce que plusieurs manufacturiers évitent d'utiliser une approche « pire des cas », trop dispendieuse. L'apparition simultanée du non-respect de spécifications à plusieurs niveaux dans un assemblage ne se présente qu'avec une très faible probabilité. D'autre

part, souvent dans l'usinage plusieurs écarts de fabrication et erreurs des machines-outils répercutées sur les pièces usinées viennent s'annuler. Deuxièmement, des industries n'ont d'autre choix que d'accepter les tolérances statistiques pour survivre aux contraintes financières. C'est le cas de l'industrie électronique, où l'évolution des procédés de fabrication et du contrôle ne suit pas le rythme de la technologie de miniaturisation et où les coûts investis dans la technologie doivent s'amortir. Finalement, les méthodes statistiques qui ont connu des applications réussies dans la production comme CSP (Contrôle Statistique des Processus) ou CSQ (Contrôle Statistique de la Qualité) influencent les développeurs de projets vers une approche de design statistique. On définit les « indices de capacité » et on fait un survol des pratiques qui les emploient. Les phases d'évolution des standards ISO pour les tolérances statistiques des pièces mécaniques et les délibérations techniques engendrées sont également exposées.

U. Roy et B. Li [ROY 99] fournissent une méthode de calcul ainsi qu'une façon de représenter et interpréter les tolérances géométriques associées aux objets polyédriques dans un modèleur solide. La méthode repose sur un modèle variationnel surfacique, où les variations sont obtenues à partir des paramètres variables des surfaces composantes, soumis à des contraintes des zones de tolérance. On cherchait réponse à deux questions : Comment décrire les zones de tolérance à partir des différentes spécifications, et comment faire varier les variables quand le modèle variationnel est mis en place ? Le but était d'obtenir les zones de tolérance résultantes pour une pièce à partir des modèles variationnels de chaque face. Cette technique a permis de développer un logiciel permettant de définir l'objet et les spécifications de tolérances.

P. Lafond et L. Laperrière [LAF 99] ont modélisé les chaînes de tolérances 3D tenant compte des contraintes fonctionnelles associées à un assemblage mécanique. Des joints virtuels élémentaires servent à simuler les petits déplacements permis. Des matrices

jacobiennes additionnent les effets des dispersions sur la chaîne cinématique. Cette dernière inclut deux types de paires d'éléments fonctionnels : paires internes (sur la même pièce) et paires cinématiques (sur différentes pièces en contact).

P. Le Pivert [LEP 99] décrit le processus de fabrication en utilisant le concept de SATT, ainsi qu'un modèle de résolution, « le tenseur de résolution ». Celui-ci sert à simuler des opérations d'usinage et à faire du contrôle virtuel. Le comportement géométrique des procédés suppose un contrôle statistique assurant la détermination des variances en cours de fabrication. Cette technique permet de comparer les résultats de la fabrication virtuelle et les exigences fonctionnelles du design. La recherche de l'erreur dans des points isolés des surfaces autorise le traitement des zones de tolérances symétriques quelconques. Dans le cas des zones non symétriques, on applique un calcul de symétrisation. L'emploi d'un modèle de données, identique pour la conception et la fabrication, et la rapidité des algorithmes favorisent une intégration de la maquette dans une démarche d'ingénierie simultanée.

F. Villeneuve *et al* [VIL 00] ont fait récemment une analyse d'une phase d'usinage pour quantifier les erreurs dues à la mise en position et aux opérations d'usinage. Ils tentent de valider un modèle de spécifications de fabrication 3D s'appuyant sur les travaux de P. Bourdet [BOU 96] et E. Ballot [BAL 97] concernant le calcul des chaînes de cotes tridimensionnelles. Le formalisme proposé s'adresse à la cotation de fabrication et les défauts de surfaces ont été modélisés à l'aide des TPD. Un procédé expérimental a été mis en place pour identifier les paramètres et valider leurs hypothèses.

B. Chevalier et L. Mathieu [CHE 00] ont présenté GeoSpelling, un modèle développé en France par L. Mathieu et A. Ballu, proposé au Comité ISO en 1996, et partiellement décrit dans le document ISO/TS 17450-1. Il s'agit d'un langage permettant l'échange de la géométrie d'une pièce, incluant les spécifications de tolérances et les éléments de

géométrie avec défauts. Il repose sur un modèle imaginaire, appelé « Skin ». Un grand nombre de points incluant les déviations par rapport au modèle nominal doivent être considérés pour le contrôle, afin de s'approcher le plus possible du « Skin Model ». Six opérations construisent la géométrie non-idéale : partition, extraction, association, collection, construction et filtration. Des relations topologiques entre les objets composants, plutôt qu'un référentiel, précisent la position de la pièce. Dans l'échange d'information, on ne fournit pas uniquement la géométrie et les caractéristiques intrinsèques des objets, mais également l'historique des opérations. Ainsi, la « construction » de la pièce permet plus facilement d'agir sur le modèle nominal, d'analyser et de modifier les procédures de tolérancement.

Un modèle de calibre à mobilités internes est exposé par J-Y. Dantan *et al.* [DANa 00], [DANb 00], permettant d'intégrer les spécifications géométriques normalisées, ainsi que les capacités d'un procédé de fabrication. Cette approche établit le domaine des variations acceptables de la géométrie non idéale par deux concepts :

- L'interface calibre/pièce qui définit la position relative entre les surfaces réelles de la pièce et les surfaces idéales du calibre.
- La structure du calibre qui modélise l'environnement de la pièce.

Une méthode d'analyse des spécifications fonctionnelles et de fabrication valide le processus d'usinage. L'outil de calcul s'appuie sur une approche variationnelle de construire la géométrie réelle des pièces par variation de la géométrie nominale. Le comportement géométrique de l'ensemble pièce/calibre est modélisé par :

- le domaine de compatibilité, défini par les relations concernant les déplacements des surfaces de la pièce et celles du calibre.
- le domaine interface, considérant les contraintes entre les surfaces de la pièce et celles du calibre.
- le domaine structure, défini par les contraintes entre les composants du calibre.

Ces domaines sont exprimés dans un espace à "n" dimensions représentées par les

paramètres de définition variationnelle de l'ensemble pièce/calibre. Le but est d'obtenir une expression formelle des relations liant ces domaines. On étudie le comportement pièce/calibre et le domaine de fabrication qui limite les écarts de la pièce afin de vérifier la cohérence entre les spécifications fonctionnelles et celles de fabrication. Le processus d'usinage est validé si le domaine de fabrication est inclus dans celui de design.

### **1.3 Tolérancement assisté par ordinateur**

Le tolérancement assisté par ordinateur (Computer Aided Tolerancing, CAT) a fait son début dans les années 80 quand le système TOLTECH (TOLerance TECHnology) [BJO 78] a été développé au Laboratoire d'Ingénierie de Production à Trondheim, en Norvège. Ce système simple, conçu pour le calcul de tolérances des chaînes de cotes unidimensionnelles, assignait les tolérances pour minimiser le coût de fabrication en réalisant une optimisation linéaire.

O.W. Salomons [SAL 97] fait une revue des principaux systèmes de tolérancement assistés par ordinateur (CAT). Les recherches dans ce domaine sont de plus en plus importantes, fait mentionné par différents groupes d'intérêts comme l'ASME ou le CIRP. Ces systèmes sont développés pour assister les concepteurs, les manufacturiers et les contrôleurs dans leurs tâches difficiles concernant l'analyse et la synthèse des tolérances. Ces dernières ne sont plus considérées comme des « étiquettes » attachées aux dimensions, et leur traitement utilise des résultats de recherche dans le domaine du tolérancement. Les principales caractéristiques des systèmes CAT devraient être :

- Traitement des tolérances 2D et 3D, incluant les tolérances géométriques.
- Intégration étendue avec les systèmes CAO commerciaux.
- Modules testés et systèmes disponibles chez les vendeurs de marque.

À partir de ces critères, plusieurs systèmes sont discutés et comparés.

**CATIA.3D FDT™** développé par Dassault Systèmes et intégré dans **CATIA®** à partir de la version 4 Release 1.6 repose sur le modèle de représentation **SATT**. Il fournit des outils de spécification de tolérances et fonctions d'analyse de tolérances.

Le module de tolérancement **TI/TOL.3D+** développé par Texas Instruments s'incorpore au système **CAO ProEngineer**. Il est construit à partir de la théorie proposée par **ADCATS** (Association for the Development of CAT Systems), un regroupement d'une douzaine d'industriels et de l'Université Brigham Young.

D'autres systèmes **CAT** reposant sur cette théorie ont été développés, comme **AutoCATS** pour **AutoCAD**, **CATIA-CATS** pour **CATIA** et **CV-CATS** pour **CADDS5**.

**Variation System Analysis Inc.** offre deux modules de tolérancement : **VSA-GDT** pour les spécifications de tolérances et l'analyse du respect des normes **ANSI/ISO**, et **VSA-3D**, un kit pour l'analyse et la synthèse des tolérances. Les deux peuvent être intégrés dans **CATIA**, **Unigraphics**, **I-DEAS** et **ProEngineer**.

Un autre outil de tolérancement semblable est **Valysis**, faisant partie du module **ValysisDesign**, offert par **Tecnomatix**. Il autorise la spécification des tolérances, la vérification des tolérances géométriques et dimensionnelles ainsi qu'une analyse des tolérances dimensionnelles.

Notons que ces outils de tolérancement traitant des situations **2D** ou **3D** et respectant les normes proviennent de noyaux de calcul des chaînes unidimensionnelles. Il n'y a pas de relation entre les valeurs des tolérances, les contraintes fonctionnelles et la physique des processus de fabrication.

En conclusion, on remarque de nombreuses études ces dernières années dans ce

domaine, orientées d'une part vers la définition mathématique de la cotation et du tolérancement, et d'autre part vers la description de la géométrie non-idéale. On en discute toujours le rapport avec les normes, dont l'évolution résulte des recherches. Ces dernières sont souvent réalisées par des mathématiciens ou roboticiens donnant parfois des réponses originales, mais pas toujours adaptées aux besoins des concepteurs et des manufacturiers. Un nombre élevé de modèles coexistent actuellement, car aucun ne peut répondre complètement aux besoins, caractéristique certaine d'une situation transitoire. La spécification automatique des tolérances est partiellement réalisée. Le transfert de modèles de calcul unidirectionnels sur deux et trois dimensions reste un objectif envisageable, ainsi que l'intégration des outils d'analyse et de synthèse de tolérances 2D et 3D dans les systèmes CFAO.

## **CHAPITRE 2**

### **PROBLÉMATIQUE ET OUTILS D'ANALYSE**

Ce chapitre discute d'abord quelques aspects reliés à la normalisation des spécifications de tolérances pour ensuite mettre en évidence le couplage permanent existant entre dimensions et tolérances. Puis, les problèmes de tolérancement seront définis, et les outils d'analyse seront brièvement présentés.

#### **2.1 Discussion sur les normes**

La définition des pièces mécaniques par des spécifications normalisées reste un problème essentiel pour les bureaux d'études, ainsi que pour les bureaux de méthodes et de contrôle qui les interprètent. Ainsi, les standards et les normes actuelles de dimensionnement et tolérancement constituent un des outils centraux pour guider le design des mécanismes et de tout produit industriel qui fait appel encore aujourd'hui à l'expérience des ingénieurs et à des interprétations subjectives. Les spécifications de tolérances portées sur les dessins de définitions des pièces décrivent les variations autorisées pour les pièces réelles par rapport à un modèle nominal. L'utilisation des systèmes informatiques en tolérancement a allégé le travail des concepteurs et a limité les erreurs syntaxiques.

Notons les résultats d'une étude effectuée par le LURPA (Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée, École Normale Supérieure de Cachan) [BAL 90] sur des plans de définition dans le domaine de l'aéronautique contenant plusieurs ambiguïtés. Ainsi, sur les 244 spécifications contenues par les plans extraits pour l'étude, 46% des spécifications comportent des ambiguïtés dues au graphisme et 45% des surfaces utilisées comme référence souffrent d'incohérences entre leurs caractéristiques géométriques et leur utilisation. D'autre part, 29% des spécifications géométriques ne



peuvent pas être vérifiées et sont donc mal interprétées, et 25% d'entre elles n'ont pas un sens normalisé précis.

La complexité de la mise en œuvre de la norme s'ajoute à celle du produit. Dans ce cas, il s'agit d'une culasse comportant des milliers de spécifications, d'où en résultent des difficultés pour la cotation et le tolérancement. Cette étude montre à l'évidence les limites d'utilisation des normes : des spécifications dénuées de sens ou contradictoires dues en partie à une absence de méthodologies. On constate également qu'il y a des limites dans la définition des éléments réels ainsi que dans la définition des relations relatives entre éléments. Même si des vérificateurs syntaxiques pour les spécifications ont été développés, agissant comme des « correcteurs orthographiques » pour les concepteurs, l'absence de méthodes d'aide au tolérancement constitue une limite importante pour une meilleure utilisation des normes.

De nombreux chercheurs ont étudié les limites des normes des années 90, qui peuvent être classées en deux catégories : limites syntaxiques et limites sémantiques. Les premières sont mises en évidence par l'utilisation des annotations sur les dessins pour indiquer des spécifications souhaitées que les normes, possédant une syntaxe limitée, ne peuvent pas offrir. Il existe des lacunes dans la combinaison résultant d'un ensemble des spécifications et le concepteur doit les préciser alors littéralement. Les limites sémantiques sont dues aux limitations de sens reliées aux définitions données par la norme pour des caractéristiques comme la dimension ou l'ajustement d'une référence qui s'appuient souvent sur des moyens technologiques de contrôle en évolution. D'autre part, il faut que des grandeurs concernant une pièce mécanique soient définies de façon indépendante du moyen de contrôle.

Souvent les normes, s'appuyant sur des exemples particuliers, apportent des solutions à des problèmes simples, et ne donnent pas de solutions pour les situations générales. Les

comités internationaux de normalisation ont fait des efforts pour répondre aux observations, à l'évolution technologique et à l'intégration répandue des systèmes de CFAO. La norme américaine ANSI Y14.5M publiée en 1994 est le résultat de plus de onze ans de travaux et se rapproche des normes internationales ISO en ajoutant plusieurs concepts nouveaux. Ainsi, aux modificateurs classiques maximum et minimum de matière ont été rajoutés ceux de plan tangent (« Tangent plane ») ou état libre (« Free state »). Le concept de offset sur les surfaces a été intégré par la notation de frontière (« Boundary ») issue des travaux de A.Requicha et V.Srinivasan. La définition de la zone de tolérance sphérique a été introduite, ainsi que la possibilité d'indiquer des tolérances statistiques.

On remarque le souci d'avoir une base mathématique pour définir les spécifications et la prédominance des tolérances géométriques. En effet, cette norme a été conçue conjointement avec un complément mathématique, la norme Y14.5.1M. Celle-ci précise les principes du tolérancement et les descriptions mathématiques des différents concepts de la norme principale, éléments indispensables à l'établissement des algorithmes pour un tolérancement automatique. Ce complément mathématique provient de cinq ans de réflexions, et la plus grande difficulté n'était pas de trouver les modèles mathématiques mais de les adapter aux besoins et aux usages des ingénieurs. Le traitement des références constitue un point exigeant traité ici, parce qu'il existe souvent plusieurs choix de références et qu'il faut déterminer quel en est l'ensemble cohérent avec les spécifications fonctionnelles. Toutefois, un choix adéquat de références ne peut pas répondre à la question fondamentale concernant l'identification des éléments fonctionnels et leur spécification. Des évolutions similaires sont observées pour d'autres normes nationales, comme c'est le cas pour les normes françaises AFNOR.

On peut conclure que les limites actuelles des normes s'expliquent en partie par la nécessité de fournir aux usagers une méthodologie unique pour le dimensionnement et le

tolérancement. Son développement historique en étapes et basé souvent sur des cas particuliers explique partiellement ses carences. D'autre part, la complexité des standards et les possibilités d'interprétations requièrent des utilisateurs qualifiés. En même temps, l'intégration des nouveaux concepts issus des travaux de recherche a fait dévier un peu les normes de leur objectif initial, assurer le fonctionnement des mécanismes et l'interchangeabilité, vers l'inspection et les technologies de mesure.

## 2.2 Dimensions et tolérances

La spécification des tolérances est nécessaire parce que des dimensions parfaites ne peuvent jamais être obtenues pour une pièce mécanique réelle. D'autre part, le bon choix des tolérances et une description non-ambigüe du produit sont essentielles à la qualité des produits, ainsi que leur interchangeabilité, et influencent de manière décisive le coût de production. Comme L.Mathieu, A.Clément et P.Bourdet l'ont déjà mentionné [MAT 97], on peut distinguer trois « espaces géométriques » :

- l'espace euclidien (Euclidean World,  $\mathcal{EW}$ ) dans lequel on utilise la géométrie euclidienne et tout objet est considéré parfait.
- l'espace CFAO (CAD World,  $\mathcal{CADW}$ ) où on manipule des objets virtuels et on utilise une approximation numérique du monde réel.
- l'espace industriel (Industrial World,  $\mathcal{IW}$ ) où l'objet virtuel est un modèle géométrique incluant les imprécisions du monde physique servant à modéliser les pièces mécaniques réelles.

Dans l'espace  $\mathcal{EW}$  il y a une équivalence parfaite de toutes les spécifications géométriques, et les propriétés générales, comme la symétrie ou la transitivité, sont utilisées conjointement avec tous les théorèmes géométriques. Dans les espaces  $\mathcal{CADW}$  et  $\mathcal{IW}$  les choses diffèrent : Les approximations numériques incluant des erreurs, des inexactitudes et des contraintes imposées par des facteurs du monde matériel ne permettent pas une utilisation exhaustive de la géométrie euclidienne. Ainsi, les

résultats de calcul seront dépendants du choix des références et de la série des dimensions de base qu'on appelle « dimensions nominales ».

### **2.2.1 Un couplage permanent**

Le standard ANSI Y14.5M [ASME 94] définit une dimension comme « une valeur numérique ... utilisée pour définir la taille, la position, les caractéristiques géométriques ou la texture de surface d'une pièce mécanique », et la tolérance est « le domaine complet où peut varier une dimension spécifique ». De plus, la tolérance géométrique est présentée comme « le terme général appliqué à des catégories de tolérances utilisées pour contrôler la forme, le profile, l'orientation, la position ou le battement ».

Intuitivement, on voudrait associer à une dimension un vecteur plutôt qu'une simple valeur numérique. Le rayon d'un alésage doit se rapporter à son centre pour que cette dimension prenne sens. Le centre d'un alésage devrait être positionné par rapport à d'autres références, et on utilise dans ce cas une tolérance de position. Ainsi, après avoir défini une succession de références, les tolérances associées aux différentes spécifications s'accumulent de façon complexe, et le calcul d'une telle accumulation pour une surface cible devient très difficile.

Un exemple simple montre le lien entre dimensions et tolérances : Pour une chaîne dimensionnelle tolérancée comportant des éléments identiques, la tolérance calculée dépend du choix de la référence, donc du mode de cotation, car les tolérances s'accumulent. Quand il s'agit d'une chaîne dimensionnelle non-linéaire, des fonctions trigonométriques seront impliquées et donc l'accumulation sera non-linéaire.

Sans contredit, un fort couplage apparaît entre dimensions et tolérances. La combinaison enchaînée de tolérances dépend de la base choisie pour les dimensions et du mode de

cotation, et vice-versa, un dimensionnement adéquat sera imposé par une contrainte à respecter qui évite ainsi une accumulation excessive des tolérances. Généralement, on devrait utiliser une procédure d'optimisation de tolérances (synthèse de tolérance) impliquant un processus itératif dont la complexité ne devrait pas être sous-estimée.

De façon intuitive, les dimensions peuvent être considérées comme des caractéristiques macrogéométriques et les tolérances des caractéristiques microgéométriques. Par exemple, le diamètre d'un arbre est une dimension et le battement permis, qui est une mesure de la variation de rayon, est une tolérance.

Une similitude peut-être observée entre les dimensions et tolérances d'une part et les positions et vitesses d'autre part [ROY 91]. U.Roy mentionne que ce fait suggère un paradigme différentiel pour représenter les tolérances comme variations de la géométrie. Ainsi, pour un objet donné, sa dimension  $D$  pourrait être exprimée comme une fonction  $F$  de sa géométrie  $G$ , écrite sous une forme symbolique :  $D = F(G)$ . Les tolérances peuvent être considérées comme de petites variations  $\Delta D$  des dimensions, qui vont engendrer des variations de géométrie  $\Delta G$ .

Quand on s'intéresse à la précision des pièces fabriquées, on considère souvent des échantillons pour traiter les problèmes de qualité – et implicitement de tolérances – de pièces mécaniques. Cela est une démarche statistique où le résultat de mesure pour une dimension est traité comme une variable aléatoire  $x$ . Ainsi, la valeur nominale d'une dimension peut-être associée à la moyenne  $\mu$  d'une population pour laquelle on n'accédera qu'à la moyenne échantillonnale, et la tolérance correspondante avec un multiple de l'écart type  $\sigma$ , que nous ne connaissons que par l'écart type échantillonnal aussi. Cette dernière forme est un paradigme intégral où les dimensions et les tolérances sont reliés d'une autre façon que dans le paradigme différentiel.

À partir des travaux de Requicha [REQ 86], reposant essentiellement sur un paradigme différentiel, on peut imaginer un paradigme constructif, basé sur les surfaces décalées construites à partir des surfaces nominales. La zone de tolérance est définie ainsi par les deux surfaces décalées de façon à se confondre aux limites de tolérances minimum et maximum. Ces dernières englobent le volume d'incertitude.

### 2.2.2 Dimensionnement

Habituellement, le dimensionnement propose les « dimensions nominales » qui forment une base de dimensions. Celle-ci est choisie par le concepteur et permet de décrire complètement le modèle. Une discussion intéressante est présentée dans [MAT 97], où on mentionne que seul un modèle géométrique composé de points s'avère propice à une analyse complète. Dans un espace euclidien 3D, pour définir la position relative de cinq points, il suffit de connaître neuf longueurs. La dixième longueur relative  $L$  peut être déduite à partir des relations reliant ces points. La contrainte utilisée est que l'hypervolume de l'objet défini par les cinq points est nul dans l'espace associé de quatre dimensions :

$$L = F(l_1, l_2, \dots, l_9) \quad (2.1)$$

Tandis que dans  $\mathcal{EW}$  toute série de neuf longueurs peut être utilisée pour calculer la dixième, dans le  $\mathcal{CADW}$  ou  $\mathcal{IW}$  où les inexactitudes sont acceptées, les choses sont différentes et en différenciant (2.1) nous avons :

$$dL = \sum_{i=1}^{i=9} \frac{\partial F}{\partial l_i} \cdot dl_i \quad (2.2)$$

Quand le « pire cas » est considéré, les valeurs absolues des dérivées sont considérées. L'incertitude résultante  $\Delta L$  sur  $L$  dépend des incertitudes  $\Delta l_i$  associées à chaque longueur et principalement de la fonction  $F$  et de ses dérivés partiels (coefficients de sensibilité) :

$$\Delta L = \sum_{i=1}^{i=9} \left| \frac{\partial F}{\partial l_i} \right| \cdot \Delta l_i \quad (2.3)$$

L'erreur sur une longueur dépend de la base de dimensions choisie. Celle-ci a une importance primordiale en conception, le but étant de minimiser les coefficients de sensibilité. Dans les cas industriels, pour tout élément géométrique et non seulement pour des ensembles de points, il faut définir une position relative. À chaque ensemble de points (échantillon d'une entité) on va associer par définition des éléments de positionnement [CLE 91] : points particuliers, lignes ou plans constituant les **Éléments Géométriques de Référence Minimum (EGRM)**. Les mesures sont réalisées selon des critères d'optimisation comme les moindres carrés ou le « mini-max ».

L'expression des dimensions nominales offre deux possibilités de dimensionnement distinctes : le premier dit *paramétrique* et le second qualifié de *vectériel*. Dans le dimensionnement paramétrique, la position relative des EGRM associés, sans distinction entre les entités quelconques ou de référence, définit la position relative de deux entités. Dans le dimensionnement vectériel proposé par Wirtz [WIR 91], ce sont les vecteurs de position et d'orientation qui spécifient la position relative de deux ensembles de points. Dans ce cas on fait une distinction entre les entités référence (datum) et celles positionnées par rapport aux références (entités positionnées). La notion d'entité positionnée considère des classes de surfaces invariantes dans certains sous-groupes de déplacements des solides. L'école française a proposé à la réunion du groupe ISO de juin 1996 une classification mathématique qui utilise sept classes de surfaces comprenant 13 contraintes [CLE 95] (distances et angles entre points, lignes droites et plans).

Pour un concepteur, le choix de la base de dimensions nominales importe, car elle doit être nécessaire et suffisante, doit utiliser des coefficients de sensibilité minimales et doit correspondre aux conditions fonctionnelles. Le modèle est mal défini si les dimensions nominales ne sont pas assez nombreuses ou trop nombreuses, ce dernier cas correspondant aux sur-contraintes.

### **2.2.3 Tolérancement**

Les tolérances servent à définir les variations autorisées des surfaces limitant les pièces. Trois types de tolérances expriment des exigences fonctionnelles variées : dimensionnelles, de forme ou géométriques. Tandis que les tolérances dimensionnelles spécifient les limites des dimensions d'une entité (distance entre deux plans ou rayon d'un cercle), les tolérances de forme contrôlent la forme intrinsèque d'une surface. Les tolérances géométriques définissent la position et l'orientation d'une zone de tolérance caractérisant une entité d'une pièce, relative à d'autres entités, et rapportées à un système de référence (datum reference frame, DRF). Les modificateurs, comme la Condition de Maximum de Matière (MMC) peuvent être utilisés par les concepteurs. Ces modificateurs autorisent d'augmenter la zone de tolérance effective si l'entité réelle est fabriquée en deçà de la condition de maximum de matière. Ce principe crée une zone virtuelle appelée Zone de Condition Virtuelle. Son utilisation permet une réduction des coûts tout en gardant la fonction, l'interchangeabilité et l'assemblabilité des parties composantes.

#### **2.2.3.1 Tolérancement paramétrique et géométrique**

Le tolérancement paramétrique a été développé à partir de la cotation classique habituelle. C'est la plus vieille forme de tolérancement, ainsi que la plus facile à comprendre et à représenter. Elle comporte en revanche des faiblesses intrinsèques ne permettant pas une description univoque du modèle 3D. On estime ce type de tolérancement encore être utilisé par 75% de fabricants [MAT 97], ceux-ci devant avoir un degré de compétence élevé leur permettant d'éviter ces faiblesses. Malgré ce fait, ISO l'a abandonné.

Les contraintes sur les dimensions nominales pourraient assurer l'homogénéité, mais les



variations dimensionnelles risquent de faire disparaître certains paramètres, détruisant ainsi l'homogénéité. Le parallélisme existe dans le *EW* seulement, aussi bien que la symétrie de distance et l'inégalité triangulaire qui ne peuvent se vérifier dans *CADW* ou *I'W*. Il y a trois versions [MAT 97] : tolérancement du « pire cas », tolérancement statistique et tolérancement vectoriel. Le tolérancement statistique suppose des variations dimensionnelles indépendantes et soumises à une distribution normale. Il s'applique généralement sur les tolérances dimensionnelles. Le tolérancement vectoriel emploie des systèmes de référence particuliers et s'éloigne des normes ISO. Il ne donne généralement pas beaucoup de sens au manufacturier. Le tolérancement géométrique est le concept le plus développé à ce jour. Il exprime les propriétés d'une entité géométrique par rapport à d'autres entités, dans un espace 3D. Le tolérancement géométrique peut s'intéresser à une zone (zone simple) ou à un ensemble d'éléments (plusieurs zones simples positionnées et orientées suivant des contraintes). Les zones de tolérance et les références (datum) restent des entités géométriques parfaites, contrairement aux surfaces tolérancées conservant l'option de l'être ou pas. Toute surface parfaite provient d'une entité de substitution associée à une surface réelle. Définir une tolérance est, en même temps, définir une association d'entités de forme idéale aux entités réelles, et décrire les entités tolérancées [BAL 93].

### **2.2.3.2 Tolérancement en conception et fabrication**

Soulignons ici le point de vue traditionnellement opposé des concepteurs et des ingénieurs de procédés. Les premiers se concentrent sur la performance et la sécurité préférant des tolérances serrées assurant les fonctions et les ajustages. Les derniers s'intéressent plutôt aux coûts de production et aux technologies de fabrication favorisant des tolérances plus larges. Pour le concepteur, la transformation adéquate des exigences fonctionnelles en dimensions et tolérances convenables, c'est-à-dire la synthèse de tolérances, inclut plusieurs étapes :

- Identification des contraintes fonctionnelles.
- Établissement des systèmes de référence (MER) et identification des entités fonctionnelles importantes.
- Développement des équations fonctionnelles avec les contraintes fonctionnelles comme variables dépendantes.
- Résolution des équations et optimisation des solutions en faisant appel à des fonctions objectif définies sur des critères économiques.

Généralement, la formulation et la modélisation des contraintes fonctionnelles en conception, ainsi que l'optimisation – une procédure itérative complexe – demeurent des tâches difficiles. L'analyse des tolérances se propose de vérifier la fonctionnalité d'un assemblage supposant des tolérances déjà spécifiées. L'analyse du pire des cas, approche directe et très conservatrice, utilise les dimensions pertinentes et critiques avec leurs limites supérieures et inférieures. L'analyse statistique, plus réaliste et conséquemment économique, emploie des distributions statistiques pour les fonctions du produit.

La fabrication constitue l'étape essentielle du cycle de production, les spécifications exigées par les concepteurs devant y être respectées. Le respect des tolérances imposées dépend des capacités des procédés de fabrication, de l'équipement manufacturier (écarts d'usinage, écarts de positionnement des pièces, écarts de fixation et de positionnement des gabarits, plusieurs types d'usure, etc.), ainsi que de la stratégie adoptée pour la gamme de fabrication. Cela suggère d'exiger une méthode de tolérancement adéquate pour la fabrication. Cette question, l'un des principaux sujets de ce mémoire, sera développée dans le chapitre suivant.

### **2.3 Problèmes de tolérancement**

La qualité d'un produit se traduit d'abord par une bonne capacité d'assurer les fonctions établies par le cahier de charges. Dans le département de conception, le savoir-faire en

dimensionnement et en tolérancement doit assurer les exigences fonctionnelles sans négliger des contraintes industrielles réalistes. Le département de fabrication propose la meilleure gamme de fabrication et d'assemblage basée sur les données géométriques et technologiques compte tenu de certaines ressources manufacturières. À ce stade, les contraintes géométriques et technologiques (comme finition ou traitements thermochimiques de surface) sont considérées, afin d'élaborer une gamme de fabrication adéquate minimisant le temps et le coût. On prend aussi en compte les dispersions de fabrication dans une analyse de tolérances destinée à valider la gamme.

À un autre niveau, le département d'inspection pourrait intervenir à tout moment, mais notamment à certaines étapes critiques, pour vérifier la conformité du produit et le respect des contraintes imposées par le département de conception.

Nous avons synthétisé les principaux éléments mettant en évidence une symbiose permanente entre conception et fabrication (Figure 2.1). Nous désignons la branche de gauche comme *le problème de tolérancement en conception*. On y réalise une analyse des tolérances à partir des dimensions et des tolérances prévues par les concepteurs et consignées dans les dessins de définition du produit ou par le modèle virtuel CAO. Les équations des jeux ou des serrages fonctionnels critiques y sont construites et servent à valider les chaînes de tolérances. Finalement, il faudra vérifier que la zone de tolérance calculée associée à la surface ou l'entité cible soit incluse dans la zone de tolérance imposée.

La branche de droite correspond au *problème de tolérancement en fabrication*. On y cible une validation de la gamme tenant compte d'un modèle de fabrication aussi réel que possible. Elle a pour but d'évaluer la conformité des pièces dont l'usinage est simulé. On utilise une gamme de fabrication définie, des machines-outils dont la cinématique et ses erreurs associées sont connues, ainsi que des erreurs de positionnement

pièce / gabarit / machine-outil. En même temps, des hypothèses simplificatrices intégrées au modèle permettront d'obtenir des équations définissant l'écart des « surfaces réelles » simulées par rapport aux surfaces nominales. Finalement, il faudra vérifier que les dispersions de fabrication résultantes s'insèrent dans les spécifications de tolérances imposées pour la spécification cible.

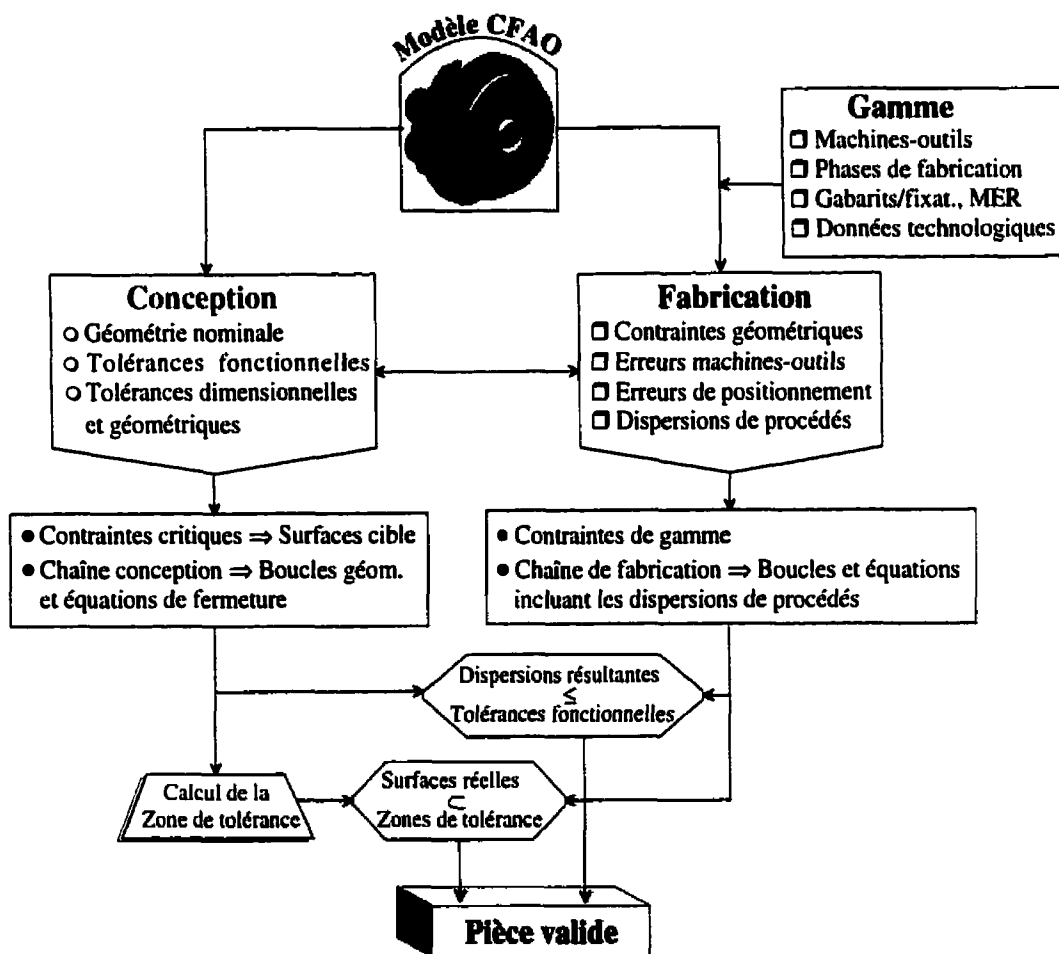


Figure 2.1: Les problèmes de tolérancement en conception et fabrication

Nous nous sommes intéressés à ces deux types de problèmes de tolérancement, en fabrication et en conception, développés dans les chapitres suivants.

## 2.4 Outils d'analyse

Des outils de calcul s'avèrent nécessaires au développement des modèles de tolérancement en fabrication ou en conception. Ils servent également au transfert des dispersions de procédés de fabrication ou des zones de tolérances afin de valider un modèle, ou de vérifier certaines spécifications de tolérance sur une surface cible.

### 2.4.1 Les torseurs de petits déplacements

On utilise des torseurs de petits déplacements (TPD) pour modéliser les petites erreurs et dispersions, mais cette approche n'est pas exclusive pour l'analyse de tolérances. On se sert aussi des Éléments Géométriques de Référence Minimum (EGRM). Notre approche a permis de traiter partiellement les erreurs de forme, d'enrichir ainsi le modèle, et un meilleur traitement des tolérances géométriques.

Le TPD  $\{\tau\}_{O,R}$  est une matrice colonne  $6 \times 1$ , exprimée dans le repère R et composée de deux vecteurs : le vecteur  $\mathbf{t}$  de petites translations du point O selon les directions du référentiel, et  $\omega$  le vecteur de petites rotations autour de ces mêmes directions perpendiculaires deux à deux :

$$\{\tau\}_{O,R} = \begin{Bmatrix} \mathbf{t} \\ \omega \end{Bmatrix}_{O,R} \quad (2.4)$$

$$\text{avec } \mathbf{t} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \omega = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Le petit déplacement  $\mathbf{t}_Q$  d'un point Q dans le référentiel  $R_0$  (Figure 2.2) engendré par les petites translations  $\mathbf{t}$  du point O et les petites rotations  $\omega$  sera :

$$\mathbf{t}_Q = \mathbf{t} + \omega \times \mathbf{O}_0\mathbf{Q} = \mathbf{t} + \mathbf{M}_r \cdot \mathbf{O}_0\mathbf{Q} \quad (2.5)$$

où  $M_r$  est la matrice antisymétrique de préproduit vectoriel des petites rotations, permettant d'écrire:  $\omega \times a = [\omega].a \equiv M_r . a$ .  $M_r$  est définie par :

$$M_r = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Généralement, on va noter  $[p]$  la matrice antisymétrique de préproduit vectoriel associée au vecteur  $p$  permettant d'écrire :  $p \times a = [p].a$ , pour un vecteur donné  $a$ .

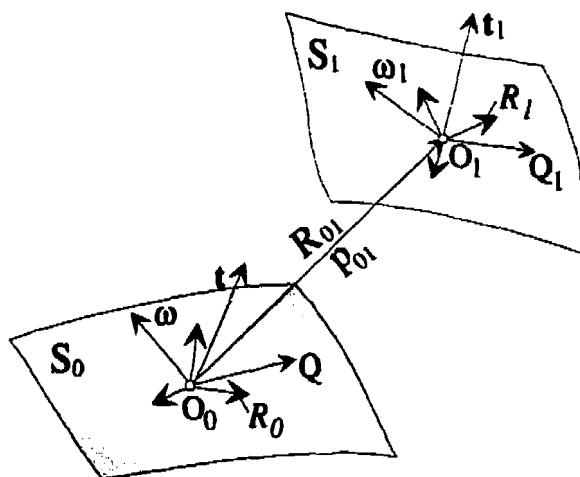


Figure 2.2: Le transport des TPD

La position et l'orientation d'un objet dans un système de référence dans l'espace euclidien sont complètement spécifiées par une transformation homogène macro-géométrique  $N_{01}$ . Celle-ci définit la situation relative des référentiels attachés (Figure 2.2) à deux surfaces  $S_0$  et respectivement  $S_1$ . Si on connaît les coordonnées d'un point  $A$  dans le référentiel  $R_1$ , alors sa position dans  $R_0$  sera :

$$\begin{bmatrix} O_0 A \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{01} & P_{01} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} O_1 A \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

ou sous forme synthétique :

$$A^0 = N_{01} . A^1 \quad (2.7')$$

Une transformation homogène analogue permet de considérer les effets des TPD et la transformation microgéométrique  $\Delta N_1$  est associée :

$$\Delta N_1 = \Delta N_1(u, v, w, \alpha, \beta, \gamma) \quad (2.8)$$

On peut imaginer que cette transformation engendre un petit mouvement de  $R_1$  en  $R_{11}$  déplaçant le point A dans son voisinage, au point B. Les composantes seront le vecteur de petites translations  $t = t(u, v, w)$  et la matrice de petites rotations  $M_r = M_r(\alpha, \beta, \gamma)$  :

$$\begin{bmatrix} O_1 B \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_r + I_3 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} O_1 A \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ou pour simplifier l'écriture :

$$B^1 = \Delta N_1 \cdot B^{11} = \Delta N_1 \cdot A^1 \quad (2.9')$$

La matrice résultante qui exprime la position de B dans  $R_0$  prenant en compte les transformations nominales et les petits déplacements sera :

$$T_{01} = N_{01} \cdot \Delta N_1 \quad (2.10)$$

À cause de propagations des dispersions par transport généralisé, il faut prendre en compte, sur une surface donnée, l'influence des TPD qui agissent sur d'autres surfaces qui lui sont liées. Si deux TPD  $\{\tau\}_{O_0, R_0}$  et  $\{\tau_1\}_{O_1, R_1}$  sont respectivement appliqués sur les surfaces  $S_0$  et  $S_1$ , (Figure 2.2), l'effet cumulatif sur la surface  $S_0$  est obtenu en transportant  $\{\tau_1\}$  sur  $S_0$  et dans le point  $O_0$  :

$$\{\tau_1\}_{O_0, R_0} = \begin{Bmatrix} R_{01} \cdot t_{O_0, R_1} \\ R_{01} \cdot \omega_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{01} \cdot (t_1 + \omega_1 \times p_{10}) \\ R_{01} \cdot \omega_1 \end{Bmatrix}_{O_0, R_0} \quad (2.11)$$

ou pour simplifier l'écriture :

$$\{\tau_1\}_{O_0, R_0} = C_{01} \cdot \{\tau_1\}_{O_1, R_1} \quad (2.12)$$

où  $C_{01}$  est la matrice 6×6 de transport des torseurs :

$$C_{01} = \begin{bmatrix} R_{01} & [p_{01}] \cdot R_{01} \\ 0_3 & R_{01} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

où  $R_{01} = M_r + I_3$

$I_3$  est la matrice identité 3×3

$O_3$  est la matrice nulle 3×3 et

$$[p_{01}] = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } p_{01} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}_{R_0}$$

#### 2.4.2 Paramètres et matrices de transport

Les surfaces limitant les objets sont le résultat des procédés de fabrication. Le positionnement relatif de ces surfaces est une mesure de précision et servira à évaluer les spécifications de tolérance. Leur position et orientation relative sont calculées en utilisant les matrices de transport. Cela permettra d'intégrer dans le modèle des erreurs de fixation, des dispersions de fabrication ou des erreurs cinématiques de la machine-outil.

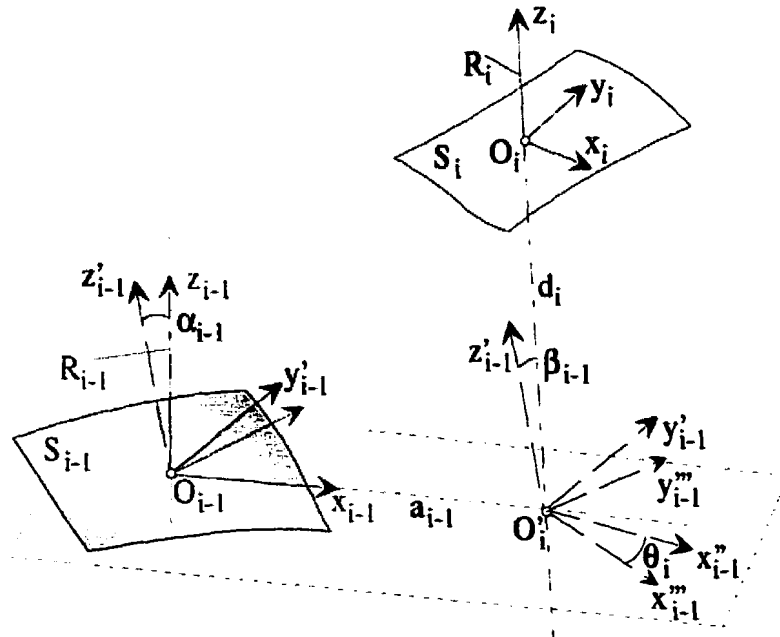


Figure 2.3: Les paramètres de Denavit-Hartenberg Hayati



L'approche matricielle a été « importée » de la robotique avec le paramétrage associé. Ainsi, on va utiliser le formalisme de Denavit-Hartenberg modifié (DH) ou, dans le cas des joints parallèles, celui de Denavit-Hartenberg Hayati (DHH) [HAY 88].

Les cinq paramètres DHH  $\alpha, a, \beta, \theta, d$  permettent de définir un référentiel " $i$ " par rapport à un autre " $i-1$ " associés aux surfaces  $S_i$  et respectivement  $S_{i-1}$  (Figure 2.3) quand les deux joints sont nominalement parallèles. Dans ce cas, l'utilisation des paramètres DH classiques pourrait conduire à des grands déplacements pour de petites variations d'angle entre les axes, pouvant invalider les hypothèses de petits déplacements. Le point  $O_i$  est obtenu à l'intersection du plan normal à l'axe  $z_{i-1}$  passant par  $O_{i-1}$ . Six mouvements simples (Figure 2.3) définissent la matrice de transport DHH :

- $R_x(\alpha_{i-1})$ , une rotation autour de l'axe  $x_{i-1}$ .
- $T_x(a_{i-1})$ , une translation au long de l'axe  $x_{i-1}$ .
- $R_y(\beta_{i-1})$ , une rotation autour de l'axe  $y'_{i-1}$ .
- $R_z(\theta_i)$ , une rotation autour de l'axe  $z_i$ .
- $T_z(d_i)$ , une translation au long de l'axe  $z_i$ .

$$DHH = \begin{bmatrix} C\beta C\theta & -C\beta S\theta & S\beta & a + S\beta d \\ S\alpha S\beta C\theta + C\alpha S\theta & -S\alpha S\beta S\theta + C\alpha C\theta & -S\alpha C\beta & -S\alpha C\beta d \\ -C\alpha S\beta C\theta + S\alpha S\theta & C\alpha S\beta S\theta + S\alpha C\theta & C\alpha C\beta & C\alpha C\beta d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

où  $S\alpha$  et  $C\alpha$  signifient  $\sin\alpha$  et respectivement  $\cos\alpha$ .

La matrice DH, plus simple, est toujours utilisée dans le modèle, quand cela est possible. Elle s'obtient à partir de DHH pour  $\beta=0$  et quand  $x_{i-1}$  est la perpendiculaire commune aux axes  $z_{i-1}$  et  $z_i$ .

On considère que la géométrie du mandrin et le mode de fixation de la pièce dans le mandrin permettent de supposer une perpendiculaire commune entre l'axe de la pièce et

l'axe machine-outil dans le voisinage du plan médian du mandrin. Ceci autorise l'emploi des paramètres DH pour inclure les erreurs de positionnement dans la plupart des cas.

### 2.4.3 Modélisation de surfaces

Les surfaces des pièces mécaniques, des objets usinés, sont approchées par des surfaces de substitution. À partir d'une surface nominale  $S_N$  précisée en design, une surface réelle  $S_R$  (Figure 2.3) est obtenue après usinage. Les dispersions des procédés sont groupées en dispersions de positionnement et de fixation (pièce/gabarit/machine-outil), et dispersions de création des surfaces usinées. On peut imaginer que les surfaces de substitution s'obtiennent par un déplacement de la surface nominale grâce aux TPD des dispersions de positionnement et d'usinage. Les surfaces de substitution, des surfaces SATT munies des EGRM (points, droites et plans) [CLE 91] permettent de définir leur position relative.

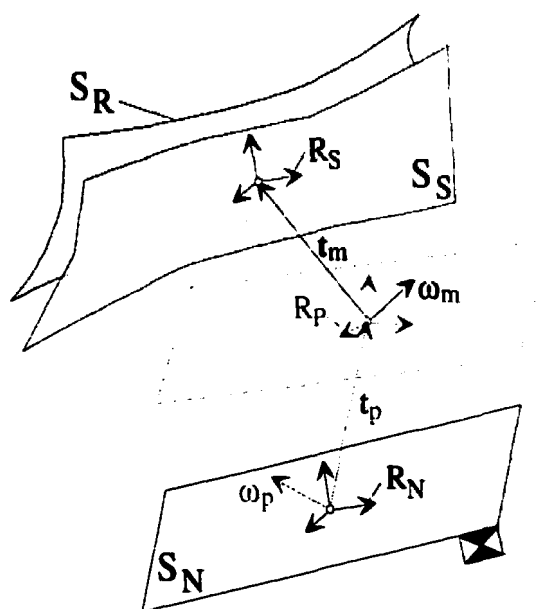






Figure 2.4: Surfaces de substitution

Il y a un ensemble minimum de points, droites et plans nécessaires et suffisants pour définir le sous-groupe de déplacement correspondant. La position relative des surfaces

se définit par des distances et des angles entre points, droites et plans. Ainsi, le problème de positionnement relatif est simplifié, en employant seulement 13 contraintes locales [CLE 97] présentées dans le Tableau 2.1. En effet, si on exclut les cas de coïncidence, parmi les 13 contraintes il n'en reste que 11 qui soient consistantes.

Tableau 2.1: Les contraintes de positionnement relatif

	M •	(D) 	(P) 
M •	C1: $M_1 \equiv M_2$ C2: $d(M_1, M_2) \neq 0$	C3: $M_1 \in (D_2)$ C4: $d(M_1, D_2) \neq 0$	C5: $d(M_1, P)$
(D) 	C3 ; C4	C6: $(D_1) \equiv (D_2)$ C7: $d(D_1, D_2); D_1 // D_2$ C8: quelconque, sinon	C9: $(D_2) \perp (P_1)$ C10: $(D_2) // (P_1)$ C11: quelconque, sinon
(P) 	C5	C9 ; C10 ; C11	C12: $(P_1) // (P_2)$ C13: $(P_1)$ sécant $(P_2)$

### CHAPITRE 3

#### ANALYSE DE TOLÉRANCES EN FABRICATION

Le dimensionnement et le tolérancement d'une pièce peuvent être imaginés comme une entité complexe tridimensionnelle multi-boucles (Figure 3.1) contenant des éléments du processus de design et de fabrication.

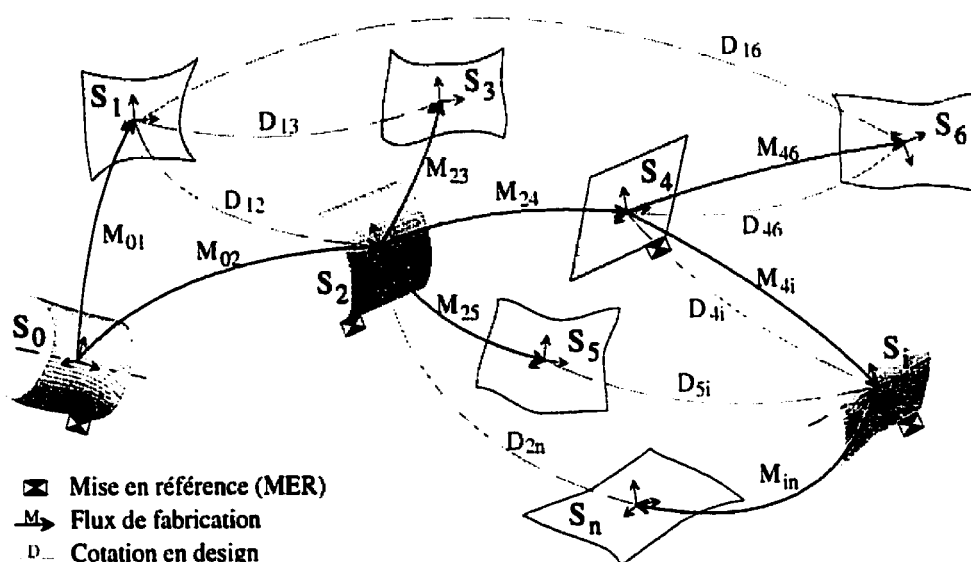


Figure 3.1: Chaînes complexes contenant les surfaces usinées

On identifie ici deux graphes. Engendré en design (D), le premier comporte plusieurs surfaces reliées par des dimensions et tolérances spécifiées dans les dessins de définition. Le deuxième est associé à la gamme et aux procédés de fabrication (M), englobant les « surfaces réelles » obtenues à partir du brut  $S_0$ . On retrouve également des surfaces de mise en référence (MER) servant de support pour obtenir d'autres surfaces, comme  $S_2$  ou  $S_4$ , qui sont des nœuds. Si des branches D et M relient simultanément certaines paires de surfaces, un seul de ces types de branches suffit pour d'autres. Des parties de ces chaînes de design (D) et de fabrication (M) se confondent, mais il y a souvent des segments de chaînes différents. Dans l'exemple présenté dans la Figure 3.1, les spécifications entre les surfaces ( $S_4, S_6$ ) ou ( $S_4, S_i$ ) sont identiques dans les modèles de

conception ou de fabrication. Par contre, celles entre les surfaces ( $S_1, S_3$ ) or ( $S_1, S_6$ ) sont différentes, et à partir de l'arbre de fabrication on peut écrire :

$$M_{13} = M_{01} + M_{02} + M_{23} \quad (3.1)$$

$$M_{16} = M_{01} + M_{02} + M_{24} + M_{46} \quad (3.2)$$

Considérant les procédés réels de fabrication, on devra prendre en compte les dispersions et les incertitudes de procédés (Dev) représentant des variations de dimension, de position, d'orientation ou de forme par rapport aux valeurs nominales.

À partir du même exemple, on peut identifier des chaînes dont les éléments de fermeture sont les tolérances fonctionnelles :  $T(S_1, S_6)_D$  ou  $T(S_5, S_i)_D$ , par exemple, définies par les spécifications de design. Les surfaces fabriquées correspondantes constituent les maillons de la chaîne. Pour ces deux exemples, les contraintes sur les dispersions (Dev) s'écrivent :

$$\text{Dev}(M_{01}) + \text{Dev}(M_{02}) + \text{Dev}(M_{24}) + \text{Dev}(M_{46}) \leq T(D_{16}) \quad (3.3)$$

$$\text{Dev}(M_{25}) + \text{Dev}(M_{24}) + \text{Dev}(M_{4i}) \leq T(D_{5i}) \quad (3.4)$$

La synthèse de tolérances présente un autre problème relié à l'étude des chaînes de tolérances associées aux surfaces fabriquées. Celle-ci s'intéresse à trouver un choix adéquat des tolérances pour chaque composante de la chaîne, et ne fait pas l'objet de cette étude. Une méthode d'optimisation prenant en compte les coûts de procédés devrait être utilisée.

### 3.1 Modélisation des procédés

Nous proposons une analyse de tolérances en fabrication basée sur une simulation des procédés de fabrication aussi réaliste que possible, incluant leurs principales erreurs. Le processus de fabrication fait appel à des technologies et à des procédés d'usinage variés.

Il s'agit d'un phénomène complexe et difficile à modéliser qui impose la considération de plusieurs hypothèses simplificatrices :

- Utilisation des surfaces de substitution pour les surfaces réelles associées aux surfaces nominales.
- Hypothèse du corps rigide pour les outils, les gabarits et les dispositifs de fixation.
- Prise en compte des principales erreurs de fixation et de positionnement pour le sous-systèmes pièce / gabarit, ainsi que des principales dispersions de fabrication pour le sous-système pièce / machine–outil.
- Erreurs dans le domaine microgéométrique, autorisant la linéarisation des petites rotations.
- Erreurs des machines–outils limitées aux erreurs dites de position, angulaires et de perpendicularité, les axes cinématiques demeurant parfaitement rectilignes.
- Absence de rugosité, d'usure de l'outil, de vibrations et de phénomènes thermiques notables, aussi bien pour les influences dues au réglage de l'outil ou à la géométrie des copeaux.

Soulignons que les erreurs de forme tel que définies par la norme ANSI [ASME 94] peuvent être partiellement prises en compte. D'autre part, le modèle pourrait s'étendre au domaine élastique en introduisant des matrices de rigidité.

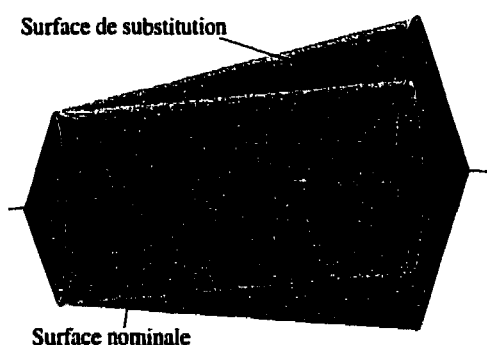


Figure 3.2: Exemple d'erreurs de forme

Par exemple, l'erreur de forme concernant une surface nominale cylindrique obtenue en deux phases de tournage (Figure 3.2) est modélisée par une surface de substitution composée. Celle-ci inclut deux surfaces coaxiales, une tronconique et l'autre conique, ainsi qu'une autre surface conique d'un axe différent.

### 3.1.1 Erreurs cinématiques des machines-outils

La précision des machines-outils demeure un facteur important pour le respect des spécifications de tolérance et pour l'amélioration de la qualité des produits. Ainsi, nous avons inclus dans le modèle de calcul des erreurs cinématiques des machines-outils.

Les erreurs de position définissent la différence entre les coordonnées actuelles et nominales le long des axes X, Y et Z. Les erreurs de tangage et lacet sont des composantes des erreurs angulaires sur une direction perpendiculaire le long de chaque axe. Elles sont influencées par la géométrie des surfaces de guidage et les interfaces de paliers et roulements. L'erreur de roulis est définie dans la direction axiale. L'erreur de perpendicularité correspond à l'écart de perpendicularité entre deux axes nominale-ment perpendiculaires. Celle-ci est due principalement à un manque d'alignement, ou à des déficiences et limites d'assemblage.

On associe à une machine-outil un système de référence  $R_m$  (Figure 3.3). Il s'agit d'un référentiel idéal, parce que les axes réels de déplacement pourraient être  $y_{rm}$  et  $z_{rm}$ . En même temps, un système de référence  $R_f$  associé au dispositif de fixation de la pièce (Figure 3.3) doit inclure les erreurs cinématiques engendrées par le positionnement relatif de  $R_f$  par rapport à  $R_m$ . Des erreurs cinématiques des machines-outils découle aussi un positionnement incertain de l'outil ( $R_t$ ) par rapport au référentiel machine  $R_m$ . En conséquence, les matrices de transport basées sur les paramètres de Denavit-Hartenberg Hayati vont inclure ces erreurs dans le modèle. Les positions relatives des

dispositifs de fixation et des porte-outils seront ajustées en conséquence.

Par ailleurs, les référentiels  $R_{p1} \dots R_{pn}$  appartenant à la pièce usinée sont chaque fois figés après la phase à laquelle ils sont associés, et serviront pour l'analyse de tolérances.

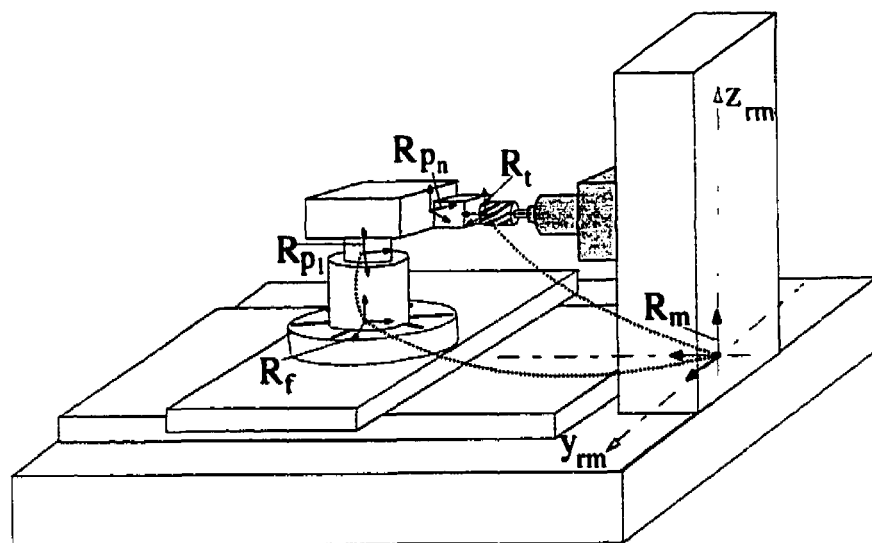


Figure 3.3: Erreurs cinématiques machine-outil

Les erreurs machines-outils considérées sont les erreurs d'avance longitudinale ou transversale en tournage, ou les erreurs de position, angulaires ou de perpendicularité en fraisage. Celles-ci sont définies de façon usuelle, voir H.J.Pahk *et al.* [PAH 97]. Une base de données contenant ces types d'erreurs a été créée à partir des données expérimentales publiées dans des articles de recherche [PAH 97]. Elle a été utilisée ensuite pour des fins de validation.

### 3.1.2 Dispersions de procédés

Parmi les dispersions considérées, il y a les erreurs de fixation de la pièce dans le montage, et le positionnement incertain du montage et des porte-outils :

- $\alpha$ , l'erreur angulaire de positionnement de la pièce dans le montage, définie par



l'angle entre l'axe de la pièce et l'axe de la machine-outil.

- $\delta$ , l'écart de positionnement axial de la pièce dans le mandrin.
- $\alpha$ , l'écart de positionnement radial mesuré sur la perpendiculaire commune.
- $\theta$ , l'angle entre les axes  $x$ , paramètre situé dans l'intervalle  $[0^\circ, 360^\circ]$ .

Les autres dispersions de procédés et erreurs des machines-outils sont négligées. On remarque la difficulté, voire l'impossibilité de modéliser le processus de fabrication en considérant beaucoup plus de facteurs. Ces derniers sont souvent couplés et d'autre part, il faudrait mettre en place des techniques expérimentales et de mesures sophistiquées et dispendieuses.

### 3.2 Méthodologie de calcul

Le calcul repose sur une stratégie de modélisation des mécanismes. Dans ce cas, les éléments du « mécanisme » sont les surfaces de substitution ( $S_S$ ) reliées par des chaînes de fabrication (Figure 3.1). On remarque trois étapes principales pour réaliser une analyse de tolérances incluant les dispersions de procédés de fabrication :

- Calcul des matrices de transport
- Analyse de la gamme de fabrication
- Métrologie virtuelle

Des référentiels  $R_i$  sont associés aux surfaces de mise en référence (MER). On note  $ij$  les surfaces "ij" fabriquées dans la sous-phase "j" de la phase "i" associée à la gamme de fabrication. Ainsi, plusieurs niveaux sont obtenus. Dans la relation relative entre les surfaces fabriquées appartenant au même niveau, les erreurs de positionnement associées au MER n'interviennent pas. Une base de données (BD) pour les erreurs cinématiques des machines-outils et pour les dispersions de procédés est créée à partir des données expérimentales. Des éléments de cette BD, ainsi que des spécifications géométriques

fournies par les modèles CAO vont alimenter les matrices de transport reliant les surfaces usinées. La position relative des EGRM associés aux surfaces SATT va prendre en compte également les erreurs cinématiques des machines-outils.

Les chaînes fermées servent à vérifier les contraintes fonctionnelles. Elles se composent de plusieurs « maillons » de fabrication, et d'un élément de fermeture constitué par la contrainte spécifiée en design. L'utilisation d'un graphe de gamme incluant les référentiels associés aux machines-outils s'impose dans la résolution des équations. La section suivante met en évidence la construction d'un graphe de gamme et ses composantes. Un système de référence pour calcul est choisi, généralement associé à la surface possédant une spécification de tolérance critique. La position relative des surfaces fabriquées (incluant les dispersions) est calculée en utilisant les matrices de transport. On construit ensuite des calibres virtuels correspondant aux spécifications de tolérances à contrôler. Souvent, des procédures d'optimisation s'avèrent nécessaires, particulièrement pour les tolérances géométriques. Finalement, on vérifie si les contraintes de design sont respectées.

Le développement des programmes informatiques est fait en Mathematica<sup>®</sup>, un environnement de calcul formel intégré, muni de puissantes routines précompilés et de capacités graphiques adéquates.

Notons que les calculs sont faits dans l'esprit et l'interprétation de la norme ASME Y14.5M concernant les spécifications de tolérances, et ils sont concentrés sur les contraintes géométriques entre les EGRM attachés aux surfaces en discussion.

### **3.3 Graphe de gamme de fabrication**

Afin d'inclure les dispersions de procédés dans l'analyse de tolérance, il faut connaître les liens technologiques entre les surfaces fabriquées incluses dans les chaînes de

dimensions et tolérances. L'ingénieur de procédés choisit tous les éléments nécessaires à la gamme de fabrication, incluant les machines-outils, les opérations, les phases d'usinages et les mises en référence. Nous proposons un graphe de gamme permettant d'identifier les boucles de calcul. Exposé d'abord sur un exemple simple, il sera ensuite employé dans l'analyse tridimensionnelle de tolérances en fabrication.

Dans cet exemple (Figure 3.4), une pièce simple est usinée par tournage en deux phases, à partir des surfaces brutes  $S_0$  et  $S'_0$ . Aux surfaces  $S_1 \dots S_4$  définies en conception correspondent les surfaces réelles usinées  $\boxed{11}$ ,  $\boxed{12}$ ,  $\boxed{21}$  et  $\boxed{22}$ . Les surfaces sont obtenues dans trois états intermédiaires de la pièce : 0, 1 et 2.

Nous étudions les dimensions et les tolérances sur la direction axiale. On va noter :

- $\epsilon$ , les dispersions de positionnement sur les MER
- $\delta$ , les dispersions de fabrication
- $\beta$ , la dispersion sur le brut

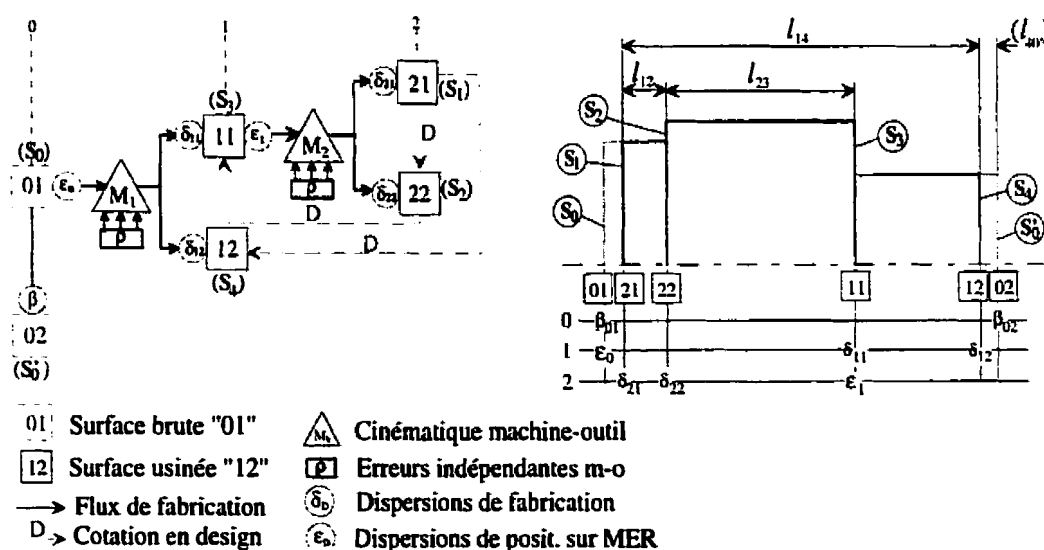


Figure 3.4: Dispersions de fabrication dans un graphe de gamme

Les erreurs de mise en référence correspondent au passage à un niveau supérieur dans le graphe. Les systèmes de référence  $M_k$ , attachés aux machines-outils, ne sont pas forcément distincts. Ceux-ci peuvent correspondre à la même machine physique, mais pour une autre mise en référence et une autre opération d'usinage. Les contraintes fonctionnelles (traits discontinus) servent comme éléments de fermeture pour les chaînes correspondant aux équations de calcul. Ainsi, pour les dimensions  $l_{23}$  et  $l_{14}$ , par exemple (Figure 3.4), les dispersions (Dev) sont calculées à partir du graphe :

$$\text{Dev}(M_{23}) = \varepsilon_1 + \delta_{21} \quad (3.5)$$

$$\text{Dev}(M_{14}) = \delta_{12} + \delta_{11} + \varepsilon_1 + \delta_{21} \quad (3.6)$$

Ce graphe permet également de calculer au Bureau de méthodes la dispersion relative à la surface brute, incluant  $\beta$ , la dispersion du brut :

$$\text{Dev}(M_{04}) = \beta + \varepsilon_0 + \delta_{12} \quad (3.7)$$

Le graphe simple présenté dans la Figure 3.4 s'emploie pour des analyses uniaxiales, correspondant à la méthode "ΔI" de Bourdet. Cependant, ce graphe peut être généralisé pour des analyses 3D, où des torseurs de dispersion remplacent les dispersions axiales, et les opérations font intervenir les matrices de transport. Ce type de graphe a été utilisé pour des analyses tridimensionnelles. Dans la section suivante, il sera exploité pour valider des gammes de fabrication sur des exemples industriels.

### 3.4 Application sur des exemples industriels

Cette méthodologie sert à l'analyse de tolérances des pièces usinées. La simulation du processus de fabrication inclut les dispersions de procédés et les erreurs des machines-outils. On a ciblé deux objectifs. Le premier consistait à valider la gamme de fabrication par la vérification du respect des spécifications de tolérances imposées en design. Le deuxième tentait d'évaluer l'importance des différentes dispersions de procédés et des erreurs machines-outils sur des tolérances critiques.



pièce dans le mandrin [KOS 85] et des erreurs des machines-outils (de position, angulaires et de perpendicularité) [PAH 97]. Le modèle demandait également des données géométriques extraites du modèle CAO, des valeurs technologiques concernant la gamme de fabrication (épaisseurs de coupe, dimensions des mors, etc.), ou des dimensions spécifiques des machines-outils.

Toutes ces données ont été structurées sous forme matricielle. Elles sont groupées dans les vecteurs **l** et **d** (longueurs et diamètres), données technologiques (**dg**), dimensions des machines-outils (**dm**), erreurs de positionnement (**erpos**) et erreurs concernant les machines-outils (**ermo**).

#### 3.4.1.1 Analyse de gamme (ex. 1)

Nous avons proposé une gamme de fabrication incluant quatre phases. Une image synthétique de celle-ci est présentée dans la Figure 3.6.

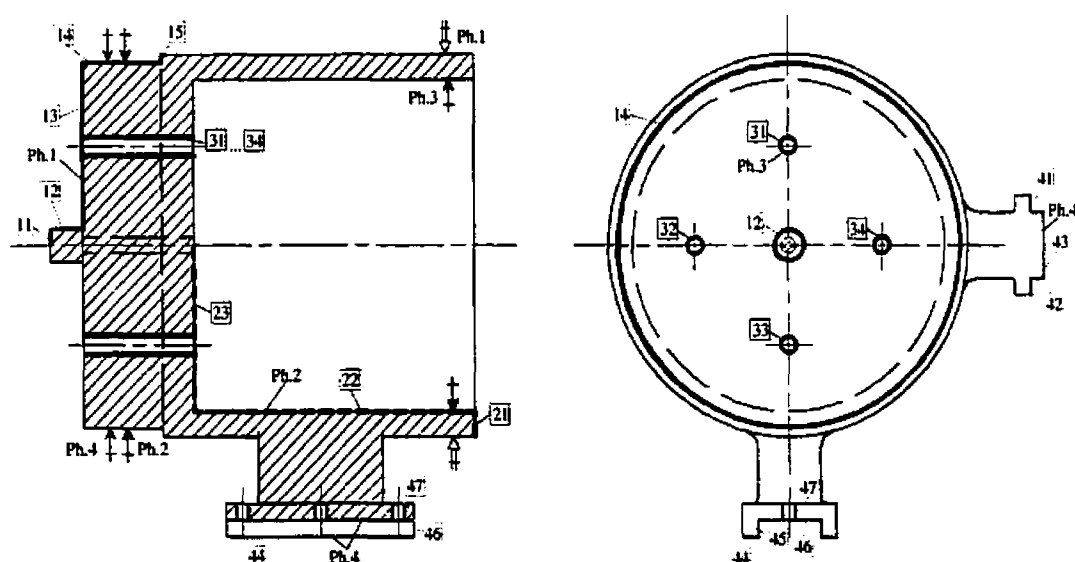


Figure 3.6: Schéma synthétique de la gamme de fabrication (ex. 1)

Les surfaces de fixation et de serrage sont indiquées par des flèches, tandis que les surfaces usinées par des chiffres encadrés **ij**. Ces dernières signifient que la surface "ij"

a été réalisée dans la sous-phase "j" de la phase "i". Les trois premières phases sont réalisées sur un centre de tournage, et la dernière sur une fraiseuse 3-axes munie d'une table rotative.

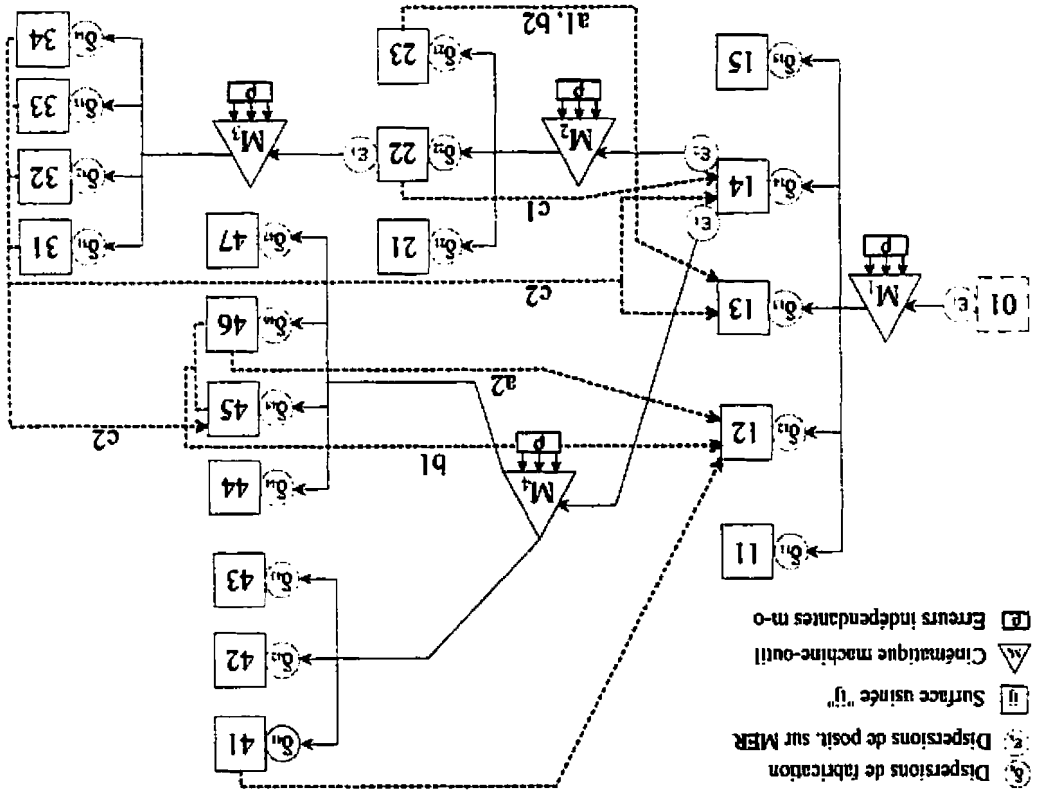


Figure 3.7: Graphe de gamme incluant uniquement les spécifications critiques (ex. 1)

À partir de la gamme de fabrication on a construit un graphe de gamme associé (Figure 3.7). Il met en évidence les surfaces fabriquées dans chaque phase et les surfaces de mise en référence. Les dispersions de positionnement (e) et les dispersions de fabrication (f) sont incluses dans les chaînes de fabrication, ainsi que les référentiels machine-outil, attachés à chaque phase. Les traits pointillés relient les surfaces de la pièce, soumises à des contraintes par les spécifications de design. Ces dernières constituent les éléments de fermeture pour les boucles utilisées dans l'analyse de tolérances.

Nous avons concentré notre attention sur trois types de spécifications de tolérances :

a) tolérances de dimension : a1:  $70 \pm 0.1$  et a2:  $165 \pm 0.05$ .

b) tolérances d'orientation : b1:  $\perp 0.05 A C$  et b2:  $// 0.1 A$ .

c) tolérances de position : c1:  $\phi 200^{+0.1}_0$   $\oplus \phi 0.2 M A B$  et

c2:  $4 \times \phi 10^{+0.02}_0$   $\oplus \phi 0.5 M A B M C$   
 $\oplus \phi 0.2 M A B M$

### 3.4.1.2 Paramètres de dispersion et matrices de transport

Plusieurs systèmes de référence ont été choisis, correspondant aux différentes modes de fixation et de mise en référence. Ainsi,  $R_0$  correspond à la première mise en référence, et  $z_0$  coïncide avec l'axe de la pièce brute.  $R_1$  est associé à la deuxième fixation, et  $z_1$  est l'axe principal du tour, ainsi de suite. Les plans  $x_i y_i$  correspondent aux plans de serrage et on suppose qu'ils sont dans le voisinage du plan médian du mandrin. La position relative des référentiels est calculée en prenant en compte les dispersions de positionnement et les erreurs cinématiques de la machine-outil.

Pour ce cas, la position relative de  $R_0$  à  $R_4$  est calculée en fonction de ces dispersions avec les paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés, synthétisés dans le Tableau 3.1.

Tableau 3.1: Paramètres DH (ex. 1)

i	1	2	3	4
$\alpha_{i-1}$ [rad]	-0.002	3.14199	3.14219	$5.692 \cdot 10^{-6}$
$a_{i-1}$ [mm]	0.21	0.04	0.05	59.9998
$\theta_i$ [rad]	-1.0472	0.785398	-0.2618	0.
$d_i$ [mm]	204.975	209.975	655.	0.

La réalisation simulée d'une surface a pour effet de « figer » ces référentiels sur la pièce. Ils serviront à définir les EGRM associés aux surfaces SATT. Certains EGRM seront



exprimés dans des référentiels particuliers pour effectuer les calculs d'analyse de tolérances.

### 3.4.1.3 Analyse des phases de fabrication

#### 3.4.1.3.1 Tournage, phases 1 et 2

À partir du graphe de gamme (Figure 3.7), on identifie les surfaces usinées dans les premières deux phases, les surfaces [11] à [15] et respectivement [21] à [23].

Le schéma présenté dans la Figure 3.8 met en évidence les erreurs de fixation et les dispersions d'usinage pour la phase de tournage.

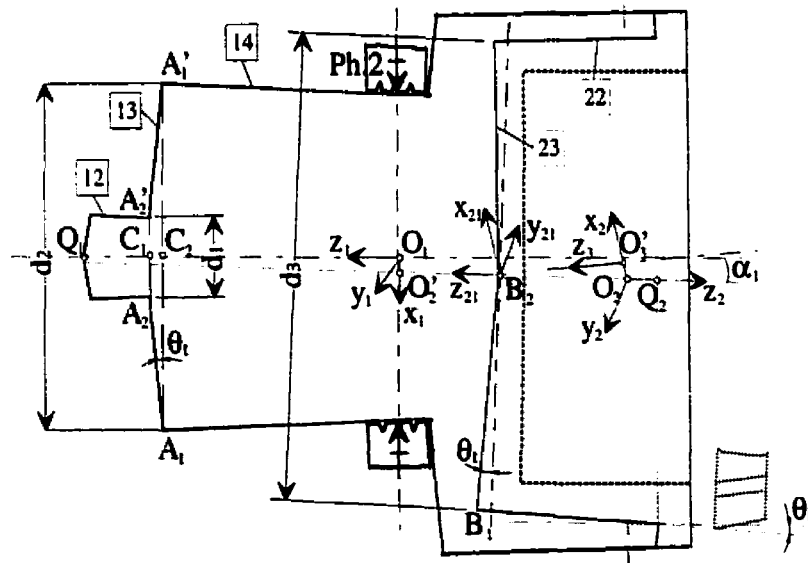


Figure 3.8: Surfaces obtenues dans les phases de tournage

Les plans de serrage  $x_i y_i$  correspondent à la phase " $i+1$ ".  $\alpha_{i-1}$  et  $a_{i-1}$  constituent les dispersions de positionnement angulaire et respectivement axial, associés à la phase " $i$ ". Celles-ci proviennent de la base de données des dispersions de positionnement, **erpos**. Ces éléments vont alimenter les matrices de transport DH. Ici, d'autres éléments s'ajoutent, comme des paramètres géométriques du modèle CAO et des données

technologiques concernant la gamme, extraites de **dg**.

$\theta_i$  et  $\theta_t$  tiennent lieu d'erreurs sur les directions d'avance longitudinale et respectivement transversale. Ces erreurs cinématiques proviennent de la base de données **ermo**. Ces dernières contribuent également à l'altération des surfaces usinées, et engendrent des erreurs de forme.

### 3.4.1.3.2 Perçage et alésage, phase 3

Les quatre longs trous, les surfaces [31] à [34], s'usinent sur le même centre de tournage. La pièce est fixée sur la surface [22] (Figure 3.9). L'axe de l'outil  $z_4$  sera positionné par rapport à  $z_3$ . Ce dernier est l'axe principal de la machine-outil, et aussi l'axe d'indexation dans cette phase.

Un seuil pour l'erreur sur l'angle d'indexation peut être également trouvé dans la base de données **ermo**. Dans les calculs, on utilise des valeurs aléatoires limitées par ce seuil.

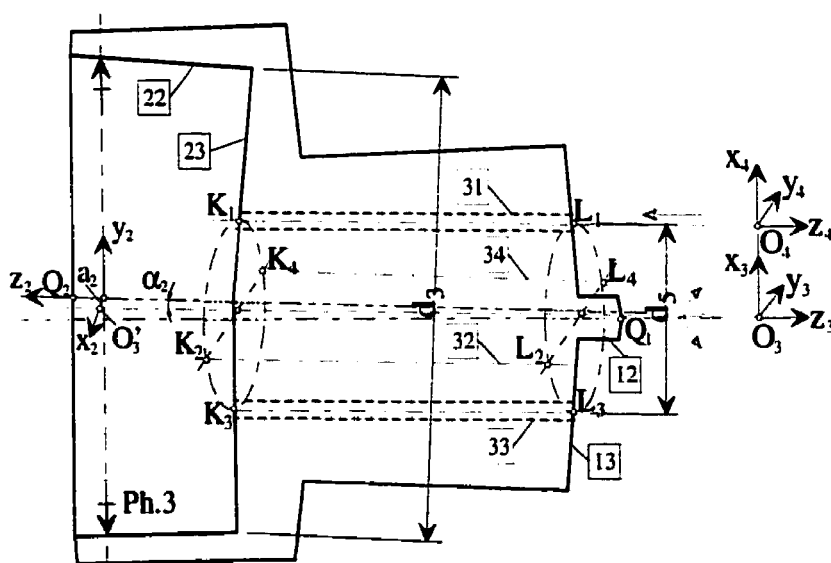


Figure 3.9: Phase de perçage et alésage

### 3.4.1.3.3 Fraisage, phase 4

Pour exécuter cette opération, la surface [2] de la pièce est fixée sur une table rotative (Figure 3.10). Les surfaces [1] à [3] sont d'abord usinées, puis les surfaces [4] à [7], après un mouvement d'indexation de  $90^\circ$ .

Le référentiel  $R_5$  (Figure 3.10) attaché à la pièce ( $z_5 \equiv z_1$ ) met en évidence une erreur de positionnement par rapport au  $R_{50}$ , le référentiel du dispositif de fixation. Ce dernier présente une erreur de positionnement par rapport au référentiel machine-outil  $R_{m2}$ . Les erreurs cinématiques de la machine-outil, comme l'erreur de positionnement ou celle de perpendicularité, imposent une position et une orientation corrigées de l'outil (référentiel attaché  $R_6$ ) par rapport à sa position « idéale ». Le calcul tient compte de ces influences des erreurs cinématiques de la machine-outil et des dispersions de fabrication.

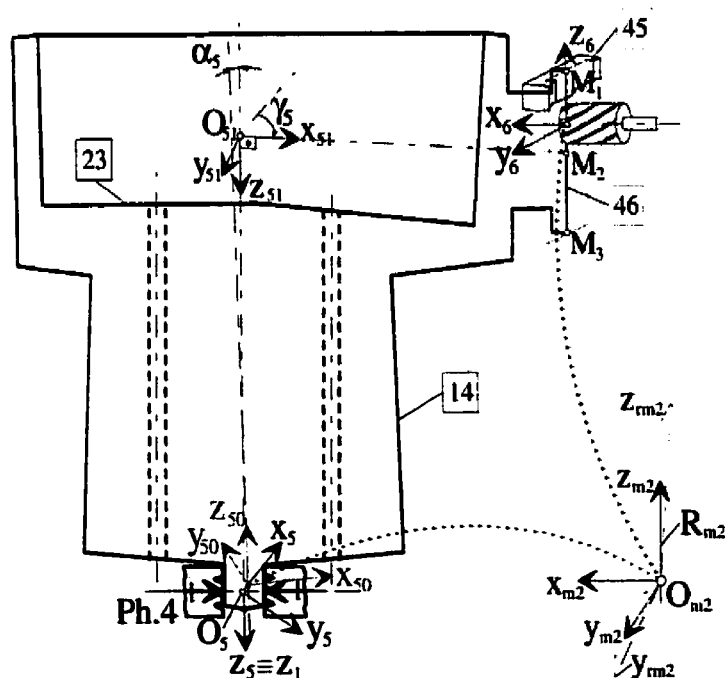


Figure 3.10: Phase de fraisage

Ainsi, la position relative des référentiels  $R_0$  à  $R_4$ , par exemple, s'obtient à l'aide des paramètres de Denavit-Hartenberg présentés dans le Tableau 3.1.

### 3.4.1.4 Analyse de tolérances

À partir du graphe de la gamme de fabrication (Figure 3.7) on identifie les tolérances critiques et on construit les chaînes de calcul correspondantes. Les chaînes de fabrication servent à déterminer la position et l'orientation relative des surfaces usinées. Les spécifications de tolérance issues de design constituent les maillons de fermeture nécessaires pour compléter l'analyse de tolérances.

Les trois types de tolérances qui font l'objet de notre étude peuvent être identifiés sur le graphe comme suit :

- tolérances de dimension ( $a_1, a_2$ )
- tolérances d'orientation ( $b_1, b_2$ )
- tolérances de position ( $c_1, c_2$ )

Quelques détails de calcul pour l'analyse de tolérances sont présentés dans les sections suivantes.

#### 3.4.1.4.1 Tolérances de dimension

$a_1$ :  $70 \pm 0.1$ .

Cette dimension est définie par la position relative des surfaces [13] et [23]. L'analyse de tolérances implique l'emploi d'un calibre virtuel pour ce cas. Le mouvement d'ajustement nécessaire est simulé par une rotation d'angle  $\varepsilon_a$  autour d'un axe d'ajustement  $\mathbf{ax}_a$  (Figure 3.8) :

$$\mathbf{ax}_a = \text{unitv}(\mathbf{R}_{21,1} \cdot \mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_{21}) \quad (3.8)$$

où  $\text{unitv}$  signifie le vecteur unitaire et  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sont les vecteurs unitaires des axes  $x, y$ , et respectivement  $z$ .

$\varepsilon_a = \text{Min} [|\alpha_i|, |\theta_i|] = |\theta_i|$ , parce que généralement les dispersions angulaires de position dépassent les erreurs angulaires des machines-outils.

$R_{21,22}$  définit ce mouvement, une rotation d'angle  $\varepsilon_a$  autour de  $\mathbf{ax}_a$  transportant  $R_{21}$  en  $R_{22}$ . Dans le référentiel  $R_1$  on a :

$$Z_{C1} = Z_{C2} + \theta_i (d_2 - d_1)/2. \quad (3.9)$$

$$Z_{C2} = l_2 - dm_{1,4}/2 - \text{erpos}_{2,1}. \quad (3.10)$$

On exprime ensuite ces points dans le référentiel de calcul,  $R_{21}$  :

$$\mathbf{C}_1^{21} = \mathbf{T}_{21,1} \cdot [0, 0, Z_{C1}, 1]^T \quad (3.11)$$

et de façon similaire pour  $\mathbf{C}_2^{21}$ .

$R_{21,22}$  transporte les points  $C_1$  dans  $C_{1r}$  et  $C_2$  dans  $C_{2r}$ . Leur position dans  $R_{21}$  sera :

$$\mathbf{C}_{1r}^{21} = \mathbf{T}_{21,22} \cdot \mathbf{C}_1^{21} \quad (3.12)$$

et de façon similaire pour  $\mathbf{C}_{2r}^{21}$ .

La distance « réelle » entre les surfaces  $\boxed{13}$  et  $\boxed{23}$  sera  $rdim$  :

$$rdim = Z_{C2r} + d_2/2 \cdot (|\alpha_i| - |\theta_i|) \quad (3.13)$$

Finalement, on va exécuter le test :

$$\dim - \text{tolérance} \leq rdim \leq \dim + \text{tolérance} \quad (3.14)$$

Dans notre cas, la condition est vérifiée :

$$69.9 \leq 70.01892 \leq 70.1$$

a2:  $165 \pm 0.05$  .

Cette dimension concerne la position relative des surfaces [14] et [46]. La surface [46] est obtenue dans la phase de fraisage (Figure 3.10). Pour positionner cette surface on considère l'axe  $M_1M_3$  du rectangle, ainsi que les distances entre  $M_1$ ,  $M_3$  d'une part, et l'axe  $z_1 \equiv z_5$  d'autre part. Les calculs s'exécutent dans le référentiel  $R_5$ . Ces points sont générés par l'outil, donc la position relative du référentiel outil est calculée dans le référentiel machine-outil  $R_{m2}$ , en considérant les erreurs de la machine-outil. La boucle est fermée par les matrices de transport  $T_{m2,50}$  et  $T_{50,5}$ . Celles-ci prennent en compte les dispersions de positionnement pour le dispositif de fixation dans le référentiel machine-outil  $R_{m2}$  et respectivement les dispersions de fixation pièce / porte-pièce.

Finalement, nous avons obtenu après calculs :

$$d_{\min} = 164.997650, d_{\max} = 165.021639 \text{ et la moyenne, } rdim = 165.009644 \text{ mm.}$$

On peut constater que la condition (3.14) est vérifiée :

$$164.95 \leq 165.009644 \leq 165.05$$

### 3.4.1.4.2 Tolérances d'orientation

b1:  $\perp \mid 0.05 \mid A \mid C$  . Cette condition implique de nouveau les surfaces [14] et [46].

Nous avons construit la perpendiculaire  $x_{51} \equiv O_{51}M_2$  entre la surface [46] et l'axe  $z_5$  (Figure 3.10), en considérant le point  $M_2$  comme le centre du rectangle correspondant. Le contrôle de la perpendicularité est fait dans le référentiel  $R_{51}$ , tourné par rapport au  $R_5$  d'un angle  $\gamma_5$  autour de  $z_5$ . En conformité avec la norme ANSI, section 6.6.4 [ASME 94], la surface [46] doit être comprise entre deux plans parallèles distancés de la valeur de la tolérance, et perpendiculaires sur l'axe  $x_{51}$ . Les coins du rectangle généré par l'outil seront calculés dans le référentiel  $R_{m2}$  tout en considérant les erreurs cinématiques machine-outil. Ensuite, les points résultants sont exprimés dans le

référentiel de calcul  $R_{S1}$  et on calcule les distances extrêmes, maximum et minimum, relative au plan  $y_{S1}z_{S1}$ .

La dispersion de perpendicularité  $dpp$ , différence entre ces extrêmes, est obtenue. Après calculs :

$$dpp = 0.036287 \text{ mm.}$$

Dans l'instance actuelle, la tolérance de perpendicularité est respectée:

$$0.036287 \leq 0.05$$

b2:  $\boxed{\parallel \mid 0.1 \mid A}$  .

Cette tolérance concerne les surfaces  $\boxed{13}$  et  $\boxed{23}$ . La surface de référence A est un plan perpendiculaire sur l'axe  $z_1$  (Figure 3.8). En concordance avec la norme ANSI, section 6.6.3 [ASME 94], la surface  $\boxed{23}$  doit être comprise entre deux plans parallèles. La valeur de la tolérance indique la distance entre ces plans.

La direction de mesure est :  $(z_1 \times z_{21}) \times z_{21}$ . Nous obtenons finalement, après calculs, la dispersion de parallélisme :

$$dpa = 0.08 \text{ mm}$$

Celle-ci vérifie la condition imposée :

$$0.08 \leq 0.1$$

#### 3.4.1.4.3 Tolérances de position

Généralement, l'analyse de tolérances de position est plus difficile à réaliser. Elle demande l'utilisation de calibres virtuels à plusieurs degrés de liberté, ainsi que des calculs complexes, comme les procédures d'optimisation multiparamétriques.

$$c1: \phi 200^{+0.1}_0 \quad \boxed{\oplus \mid \phi 0.2 \text{ M} \mid \text{A} \mid \text{B}}.$$

Dans l'interprétation ANSI, section 5.2 [ASME 94] pour ce type de tolérance de position,  $B_2Q_2$  représentant l'axe réel associé à la surface  $\boxed{22}$  (Figure 3.8) doit être contenu dans un cylindre d'axe  $z_1$ .

Dans le référentiel  $R_2$  on a :

$$B_2 \equiv O_2 B_2 = [0, 0, Z_{B1} + \theta_1 d_3/2]^T \quad (3.15)$$

$$Q_2 \equiv O_2 Q_2 = [0, 0, dm_{1,5}/2 - erpos_{2,1}] \quad (3.16)$$

avec :  $Z_{B1} = -l_5 + dm_{1,5}/2 - erpos_{2,1}$ .

On utilise  $T_{12}$  pour exprimer les vecteurs  $B_2$  et  $Q_2$  dans le référentiel  $R_1$ . Ensuite, on fait une projection sur la référence A, le plan  $x_1y_1$ , et on sélectionne la distance maximale relative au point  $O_1$ .

Finalement, on vérifie le respect de tolérance. Dans ce cas, on a obtenu :

$\text{Max} [0.043077, 0.096655] \leq 0.1$ , donc, la tolérance est respectée.

$$c2: 4 \times \phi 10^{+0.02}_0 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \oplus & \phi 0.5 \text{ M} & \text{A} & \text{B M} & \text{C} \\ \hline \oplus & \phi 0.2 \text{ M} & \text{A} & \text{B M} & \\ \hline \end{array}$$

Cette spécification est une tolérance composée de position, avec multiples segments simples de contrôle. Elle concerne la position relative des surfaces  $\boxed{31}$  à  $\boxed{34}$  (Figure 3.9).

En conformité avec la norme ANSI, section 5.4 [ASME 94], le groupement composé par les zones de tolérances cylindriques associées aux "features" (FRTZF) aura un degré de liberté (rotation) par rapport aux zones de tolérances cylindriques faisant gabarit mobile, et associées au groupement ("pattern", PLTZF).



Les axes « réels »  $K_i L_i$  doivent être inclus dans les domaines résultant de l'intersection de ces cylindres.  $z_4$  est l'axe de l'outil positionné par le centre de tournage.  $z_3$  est l'axe principal de la machine-outil. La pièce est indexée autour de l'axe  $z_3$ , et on prend en compte une erreur d'indexation angulaire. Les référentiels  $R_3$  et  $R_4$  sont positionnés en fonction des erreurs cinématiques considérées de la machine-outil.

Les points  $K_i$  et  $L_i$ ,  $i=1\dots 4$  sont exprimés dans le référentiel machine-outil. Les matrices de transport positionnent  $K_i$  et  $L_i$  dans le référentiel  $R_1$  prenant en compte les dispersions de fabrication. Ensuite, on fait une projection sur le plan de référence A. Les positions des points sont testées par rapport à PLTZF et FRTZF en utilisant les calibres virtuels.

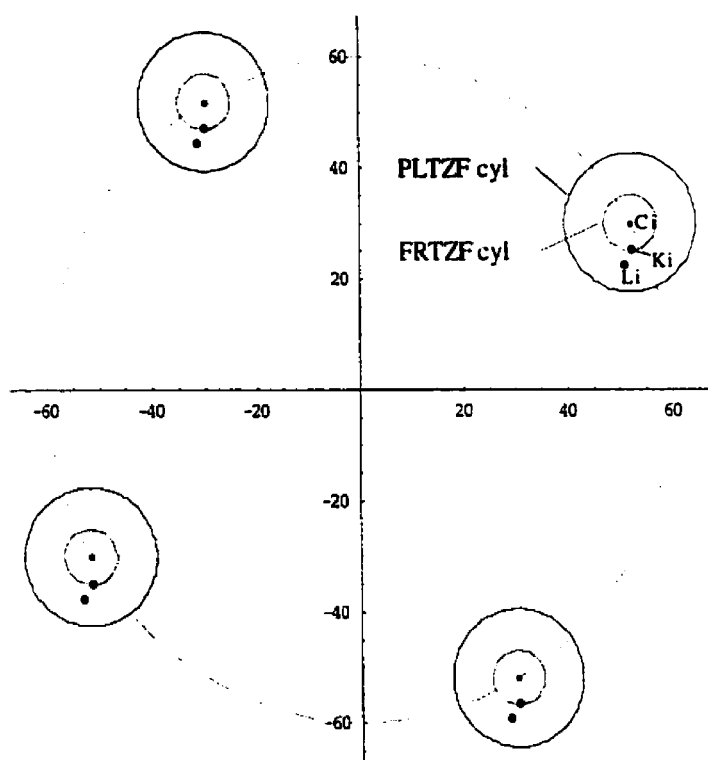


Figure 3.11: Validation de la tolérance de position composée (ex. 1)

Une procédure d'optimisation basée sur la méthode MiniMax nous a permis de trouver l'angle de rotation ( $0.0043^\circ$ ) minimisant la distance maximale entre les projections des points et FRTZF. Après calculs, on a constaté que la position relative de PLTZF vérifie

la tolérance de position qui le concerne :

$$0.157574 \leq 0.5 / 2$$

Par contre, la tolérance de position relative à FRTZF n'est pas vérifiée :

$$0.154039 > 0.2 / 2$$

L'image présentée dans la Figure 3.11 met en évidence les projections des points  $K_i$  et  $L_i$ , limitant les axes des alésages « réelles » (Figure 3.9), sur la référence A. On observe également leur position relative par rapport aux cylindres représentant PLTZF et FRTZF.

#### 3.4.1.5 Analyse de sensibilité

Dans la plupart des cas industriels, il y a des spécifications de tolérance critiques imposées en design. Celles-ci peuvent être identifiées et imposent des difficultés en fabrication, ou des technologies coûteuses pour qu'elles soient respectées. Dans ces conditions, il serait très utile pour l'ingénieur de procédés de connaître les paramètres essentiels qui influencent une certaine tolérance. Il pourra ainsi agir en conséquence. Cela serait possible si on était en mesure de réaliser une étude de sensibilité dans l'analyse de tolérances en fabrication.

Cet aspect était un de nos buts dans la recherche. Il faudrait utiliser une approche de calcul symbolique pour l'analyse de tolérances, afin de "filtrer" les dispersions de procédés de fabrication qui y interviennent et déterminer leur pondération. Mathematica<sup>®</sup>, un logiciel puissant de calcul formel, nous a permis d'atteindre cet objectif.

À partir du modèle de calcul pour l'analyse de tolérances en fabrication, nous avons mis au point un « filtre » de paramètres, basé sur un calcul symbolique en plusieurs étapes. Les paramètres en cause sont les dispersions de fabrication et les erreurs des machines—

outils. Des règles de simplification ont été employées afin d'éliminer les très petites influences simples ou combinées. Notons que ces paramètres concernent principalement les matrices de transport, restant les mêmes pour une gamme de fabrication donnée. Les conclusions tirées méritent révision dès que la gamme change. Pour chaque spécification de tolérance étudiée, nous avons obtenu finalement une fonction filtrée représentant la variation de cette tolérance en fonction des principaux paramètres de procédés de fabrication. Les coefficients, notés de façon générique  $c_i$ , apparaissant dans ces fonctions sont des valeurs numériques. Celles-ci sont calculées essentiellement à partir des données géométriques caractérisant chaque spécification de tolérance.  $c_0$  est une constante qui compense les valeurs résiduelles, d'autres dispersions de fabrication (les petites influences) intervenant dans le modèle de calcul.

Dans les prochaines sections, plusieurs résultats et quelques commentaires concernant chaque type de tolérance étudiée sont brièvement présentés.

### 3.4.1.5.1 Tolérances de dimension

a2:  $165 \pm 0.05$

Après avoir appliqué un « filtre » de calcul formel, nous avons obtenu une fonction qui exprime la dispersion dimensionnelle en fonction de  $\alpha_5$ , l'angle de dispersion angulaire de position pour la phase 4 (fraisage) et de  $s_{xy}$ , l'erreur de perpendicularité de la fraiseuse dans le plan XY :

$$Dev(d) = c_0 + \sqrt{c_0^2 + c_1 s_{xy} + c_2 s_{xy}^2 + c_3 s_{xy} \alpha_5 + c_4 \alpha_5^2} \quad (3.20)$$

Dans la Figure 3.12 on constate la contribution de ces paramètres sur la tolérance de dimension. Il est évident que l'angle  $\alpha_5$  à l'influence prépondérante.

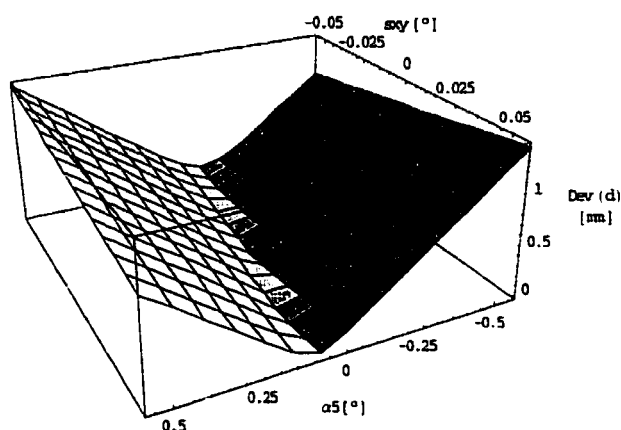


Figure 3.12: Sensibilité de la tolérance dimensionnelle

### 3.4.1.5.2 Tolérances d'orientation

b1:  $\boxed{\perp \mid 0.05 \mid A \mid C}$ .

Dans ce cas, la fonction de dispersion représente la variation de la distance maximale entre les points extrêmes de la surface  $\boxed{46}$  (Figure 3.10), en fonction de  $\alpha_5$  et  $sxy$  :

$$Dev(pp) = c_0 + \frac{c_1 + c_2 sxy + c_3 sxy^2 + c_4 \alpha_5 + c_5 sxy \alpha_5 + c_6 \alpha_5^2}{\sqrt{(c_7 + c_8 sxy)^2 + (c_9 + c_{10} sxy + c_{11} \cdot \alpha_5)^2}} \quad (3.21)$$

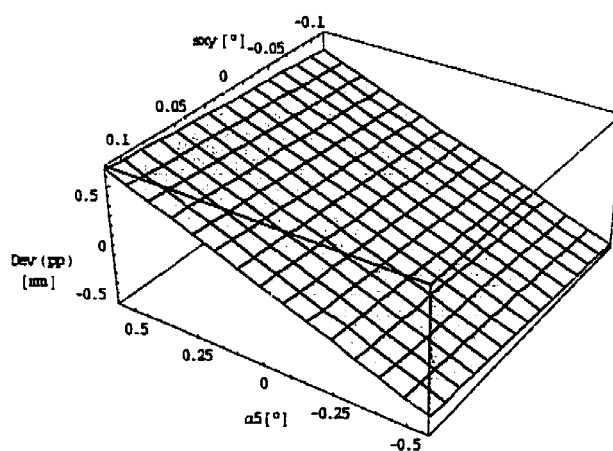


Figure 3.13: Sensibilité de la tolérance d'orientation

On remarque ici une variation planaire (Figure 3.13), où l'influence principale est due à l'angle  $\alpha_5$ .

### 3.4.1.5.3 Tolérances de position

c2: Le but était d'identifier les principaux facteurs dont dépend la tolérance de position composée concernant les quatre trous. Le modèle d'analyse fournit l'expression des distances entre les projections des points  $K_i$ ,  $L_i$  sur la référence A (Figure 3.8) et les centres des zones de tolérance. Dans ce cas, la fonction de dispersion de la tolérance de position représente la distance maximale entre ces points et FRTZF.

Après filtration et simplifications nous avons obtenu :

$$Dev(p) = c_0 + \sqrt{(c_1 + a_1 + c_2 a_2 + c_3 \alpha_2)^2 + (c_4 + c_5 a_2 + c_6 \alpha_1 + c_7 \alpha_2)^2} \quad (3.22)$$

où  $a_1$ ,  $a_2$  et  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  sont les dispersions de positionnement radial et respectivement axial pour les phases 1 et 2.

À partir de (3.22), nous avons retenu d'abord les dispersions angulaires en remplaçant les dispersions radiales avec les valeurs numériques.

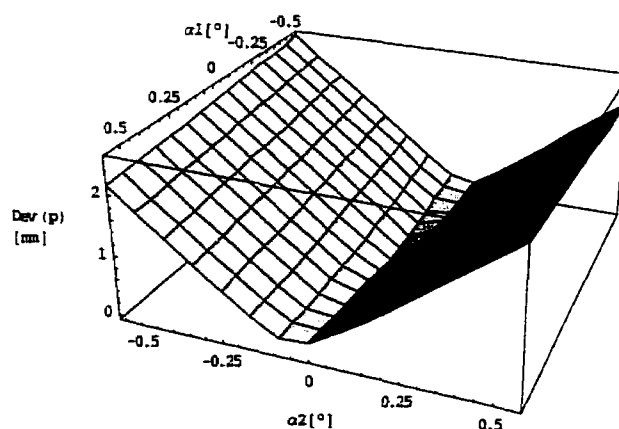


Figure 3.14: Sensibilité de tolérance de position,  $Dev = f(\alpha_1, \alpha_2)$

On remarque (Figure 3.14) que  $\alpha_2$ , la dispersion angulaire de positionnement pour la phase 2 constitue l'influence principale sur cette tolérance de position.

Ensuite, nous avons fait ressortir l'impact des dispersions radiales (Figure 3.15), parmi lesquelles  $a_2$  a la plus grande influence.

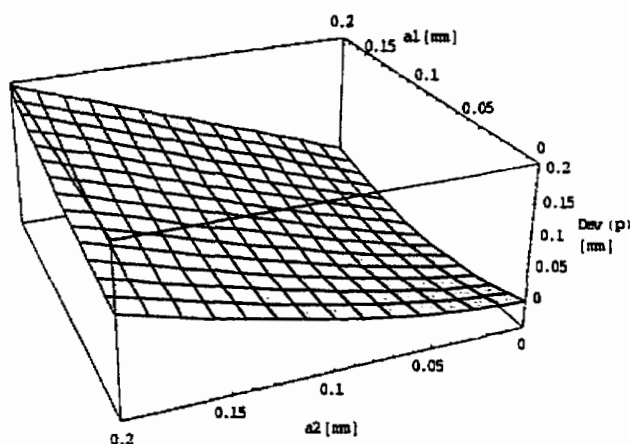


Figure 3.15: Sensibilité de tolérance de position,  $Dev = f(a_1, a_2)$

Dans la Figure 3.16 nous avons mis en évidence les influences des dispersions associées à la phase 1 d'usinage. On constate que les dispersions angulaires ont un impact plus grand que celles radiales sur cette tolérance de position.

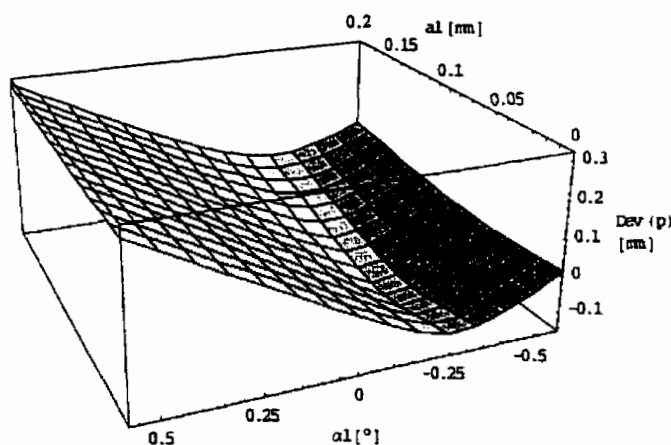


Figure 3.16: Sensibilité de tolérance de position (phase 1)

Les influences des dispersions associées à la phase 2 sont exposées dans la Figure 3.17.

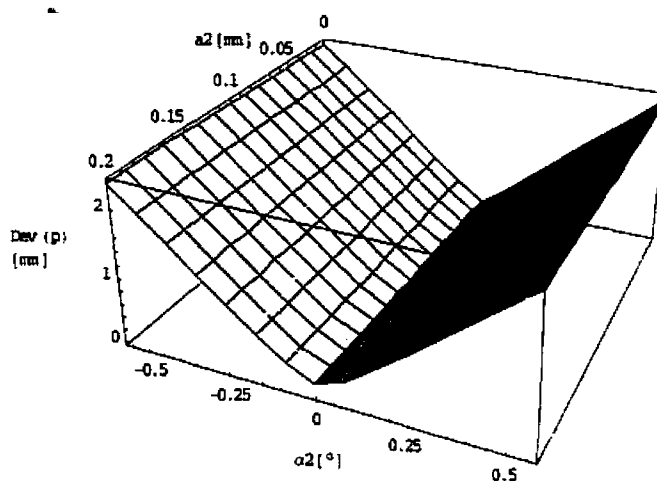


Figure 3.17: Sensibilité de tolérance de position (phase 2)

Globalement, on peut conclure que les dispersions angulaires ont la plus grande influence sur la tolérance de position étudiée. D'autre part, la deuxième phase d'usinage, plutôt que les autres, affecte plus particulièrement cette spécification.

### 3.4.2 Deuxième exemple industriel

Cette méthode d'analyse de tolérances a été appliquée pour valider la gamme de fabrication sur un deuxième exemple, où nous nous sommes intéressés à d'autres types de tolérances géométriques de position.

La Figure 3.18 montre une vue isométrique de la pièce, dont le modèle CAO s'obtient dans CATIA®. Les dessins de définition associés sont présentés dans la Figure 3.19, incluant plusieurs spécifications de tolérances (dimensionnelles, d'orientation et de position). Nous avons utilisé la même méthodologie de calcul, après avoir constitué une nouvelle base de données, spécifique pour cette pièce, concernant la géométrie et la gamme de fabrication.

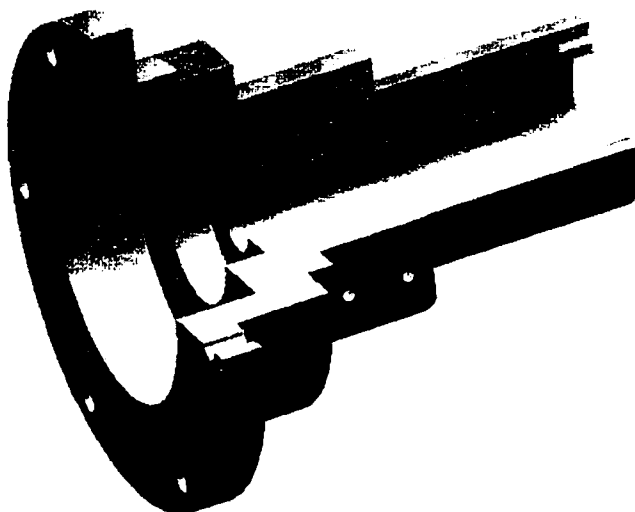


Figure 3.18: Vue isométrique (ex. 2)

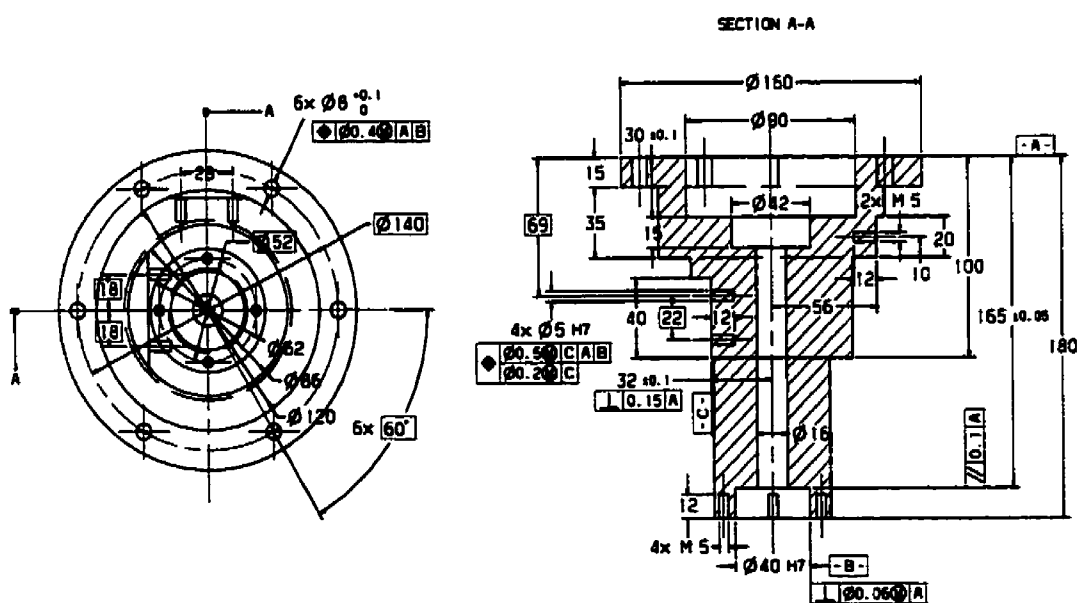


Figure 3.19: Dessins de définition (ex. 2)

### 3.4.2.1 Analyse de gamme (ex. 2)

Les cinq phases prévues par la gamme de fabrication sont illustrées de façon synthétique dans la Figure 3.20. Ici, les fixations et les surfaces usinées dans chaque phase sont indiquées.



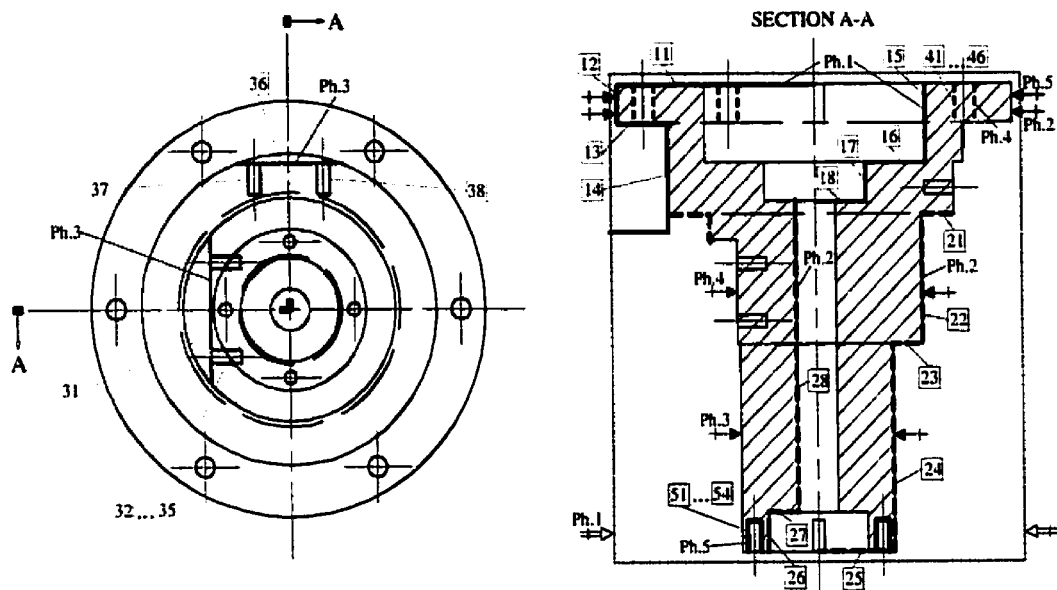


Figure 3.20: Schéma synthétique de la gamme de fabrication (ex. 2)

Pour les premières deux phases on emploie un tour conventionnel. La troisième phase est réalisée sur une fraiseuse-aléuseuse horizontale 3-axes munie d'une table rotative. Les dernières deux phases sont exécutées sur une perceuse-aléuseuse. Afin de mettre en œuvre une analyse de tolérances tenant compte des dispersions de procédés, on a construit le graphe de gamme (Figure 3.21) associé.

Dans ce cas, nous avons ciblé également plusieurs types de tolérances :

- tolérances de dimension :  $t1: 165 \pm 0.05$ .
- tolérances d'orientation :  $t2: \boxed{\parallel \mid 0.1 \mid A}$  et  $t3: \boxed{\perp \mid \phi 0.06 M \mid A}$ .
- tolérances de position :  $t4: 6 \times \phi 8^{+0.1}_0$   $\boxed{\oplus \mid \phi 0.4 M \mid A \mid B}$  et  $t5: 4 \times \phi 5 H7$   $\boxed{\oplus \mid \phi 0.5 M \mid C \mid A \mid B}$   

$\phi 0.2 M$	C
--------------	---

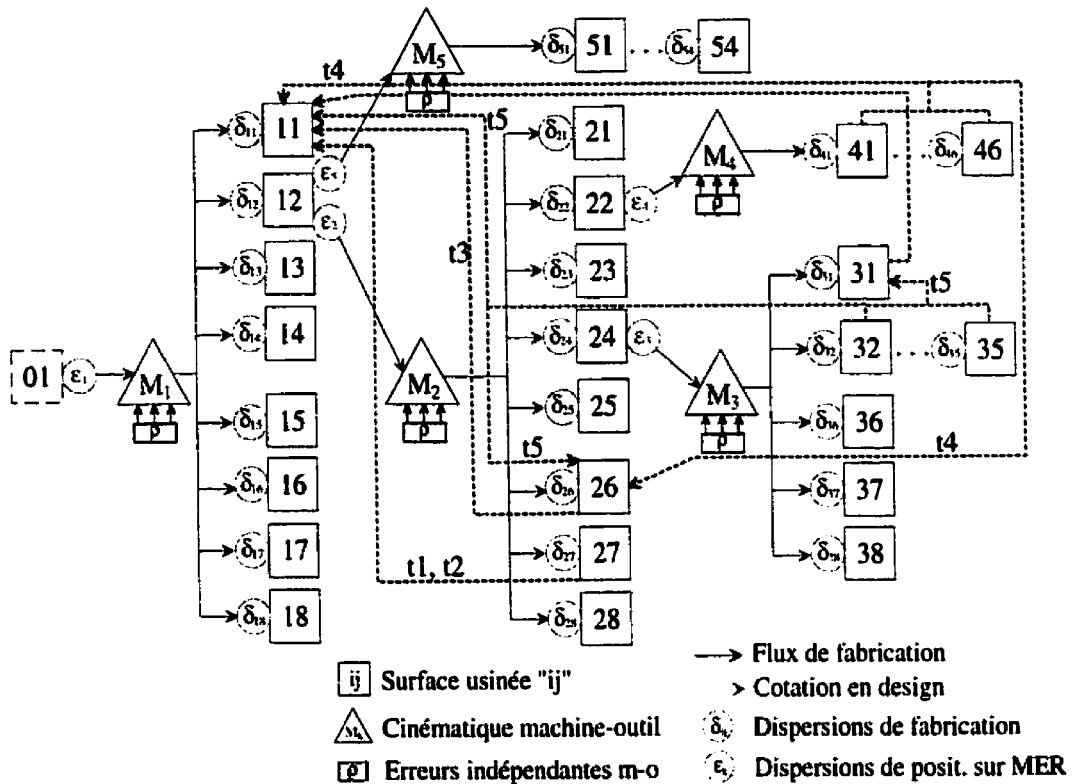


Figure 3.21: Graphe de gamme présentant uniquement les spécifications cible (ex. 2)

### 3.4.2.2 Dispersions et matrices de transport

Plusieurs référentiels sont définis correspondant aux différentes mises en référence. Les surfaces  $\boxed{ij}$  sont obtenues dans la phase "i" d'usinage et la géométrie associée est exprimée dans le référentiel  $R_i$ . Ces systèmes de référence, avec la géométrie associée, sont virtuellement « figés » et servent ultérieurement à l'analyse de tolérances.

La position relative des référentiels  $R_1 \dots R_3$  s'obtient en considérant les dispersions de procédés et les erreurs machine-outil. Les paramètres DH obtenus dans ce cas sont présentés dans le Tableau 3.2.

Tableau 3.2: Paramètres DH (ex. 2)

i	1	2	3
$\alpha_{i-1}$ [rad]	0.002	3.14199	3.14119
$a_{i-1}$ [mm]	0.6	0.05	0.04
$\theta_i$ [rad]	-1.0472	0.785398	0.523599
$d_i$ [mm]	13.025	130.01	-100.

### 3.4.2.3 Analyse de tolérances

Dans cette section, on passe en revue les résultats obtenus, après avoir fait une analyse des phases de fabrication et de la géométrie des surfaces associées.

t1: Tolérance dimensionnelle :  $165 \pm 0.05$ .

Cette dimension concerne les surfaces 11 and 27. L'analyse de tolérances impose l'utilisation d'un calibre virtuel.

Après calculs on a évalué la dimension « réelle » tenant compte des dispersions de procédés :  $rdim = 165.006455$  mm.

La tolérance dimensionnelle est vérifiée :  $164.95 \leq 165.006455 \leq 165.05$

Notons que, dans ce cas, la précision apparemment très bonne est due partiellement à une compensation favorable entre l'écart de positionnement axial et les autres écarts et erreurs des machines-outils. Le calcul symbolique le met en évidence.

Les tolérances d'orientation sont traitées en conformité avec la norme ANSI, section 6.6.3 (parallélisme) et section 6.6.4 (perpendicularité). Après calculs nous avons obtenu :

t2 : Tolérance de parallélisme  $\boxed{\parallel 0.1 \mid A}$  :  $0.016 \leq 0.1$  .

t3 : Tolérance de perpendicularité  $\boxed{\perp \phi 0.06 \text{ M} \mid A}$  :  $0.005999 \leq 0.06$  .

L'analyse de tolérances de position a tenu compte des erreurs angulaires et de perpendicularité de la perceuse-aléuseuse. En outre, on a intégré dans les calculs l'erreur de positionnement, pour laquelle une valeur aléatoire limitée par un seuil a été considérée. Pour la vérification des tolérances de position il a fallu employer des calibres virtuels et des procédures d'optimisation multiparamétriques. La définition des références, la cinématique et les degrés de liberté des calibres ont été établis en conformité avec la norme ANSI, section 5.3.2 (spécification t4) et respectivement la section 5.4.1 (spécification t5).

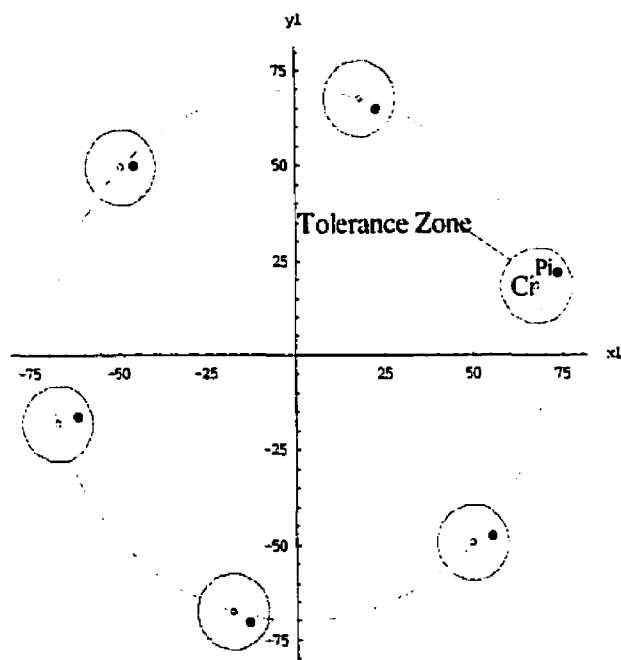


Figure 3.22: Tolérance de position t4 (ex. 2)

On expose plus loin les résultats obtenus après calculs, ainsi que des images graphiques correspondantes à cette analyse pour les deux spécifications de tolérance de position, t4 (Figure 3.22) et respectivement t5 (Figure 3.23).

t4 : Tolérance de position:  $6 \times \phi 8^{+0.1}_0$ 

$\oplus$	$\phi 0.4 \text{ M}$	A	B
----------	----------------------	---	---

.

Après calculs :  $0.137598 \leq 0.2$ , ce qui signifie que la tolérance est respectée.

t5 : Tolérance de position  $4 \times \phi 5 \text{ H7}$

$\oplus$	$\phi 0.5 \text{ M}$	C	A	B
	$\phi 0.2 \text{ M}$	C		

Pour le groupement PLTZF, la distance maximale calculée était :  $0.112216 < 0.25$

Pour le groupement FRTZF, avec une méthode MiniMax on a obtenu :  $0.046769 < 0.1$

En conséquence, cette tolérance de position est vérifiée.

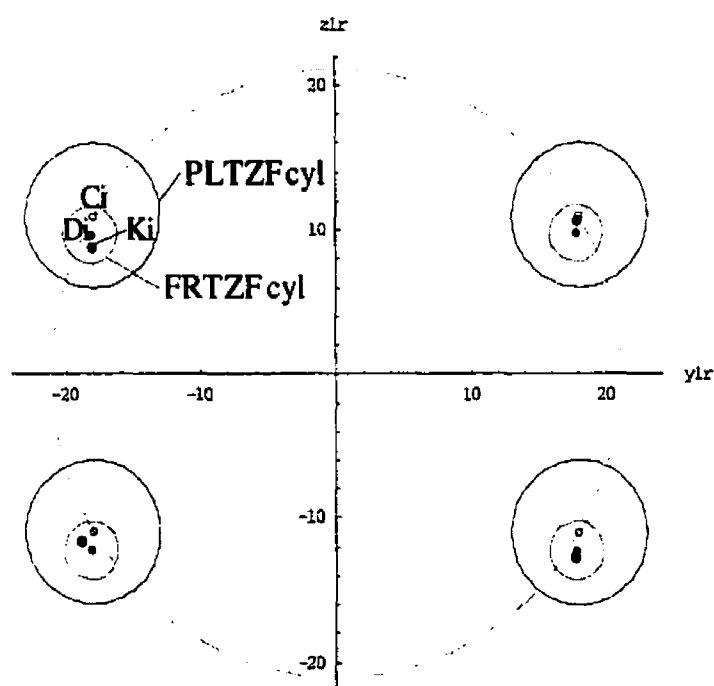


Figure 3.23: Tolérance de position composée t5 (ex. 2)

#### 3.4.2.4 Analyse de sensibilité

Trouver les paramètres essentiels influençant certaines spécifications de tolérances présente toujours un défi. En utilisant le calcul formel, nous avons réalisé une étude de sensibilité permettant de « filtrer » les influences.

On présente ici le résultat obtenu sur l'analyse de sensibilité associée à la tolérance de dimension. La dispersion dimensionnelle (Dev) dépend des dispersions angulaires, radiales et axiales de positionnement associées aux phases 1 et 2 :

$$Dev(d) = f(a_1, \alpha_1, \alpha_1^2, \delta_2, \alpha_1 \cdot \delta_2) \quad (3.23)$$

Après avoir éliminé les influences infimes, on trouve finalement :

$$Dev(d) = c_0 + c_1 \alpha_1^2 - \delta_2 \quad (3.24)$$

Dans la Figure 3.24 on présente graphiquement la contribution de ces paramètres sur la dispersion dimensionnelle. On remarque que  $\delta_2$  a la plus grande influence.

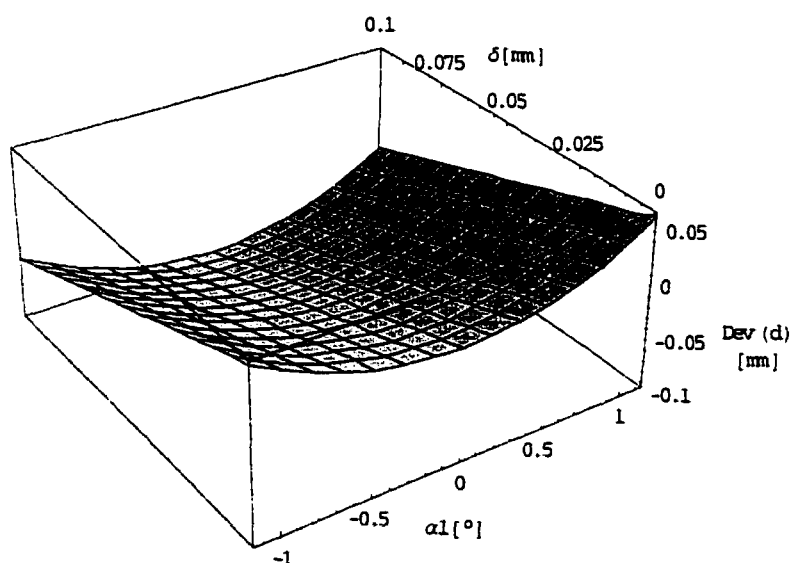


Figure 3.24: Sensibilité de tolérance dimensionnelle (ex. 2)

## **CHAPITRE 4**

### **ANALYSE DE TOLÉRANCES EN CONCEPTION**

Ce chapitre expose une méthode de traitement de tolérances en conception, permettant de calculer les zones de tolérances composées (ZTC) à partir d'une chaîne de spécifications de tolérances. Cette méthode originale s'appuie sur les travaux de M.Giordano [GIO 99] concernant les représentations des zones de tolérances et utilise des polytopes associés dans l'espace de déviation. Les TPD associés à chaque surface de la chaîne sont transportés sur la surface cible et agissent en tant que générateurs de perturbations. Ils sont appliqués aux plusieurs points définissant la surface nominale et engendrent ainsi des points de la zone de tolérance composée.

#### **4.1 Contraintes entre surfaces**

Généralement, une tolérance consiste en une contrainte associée à une surface par rapport à une autre surface (référence). On peut identifier plusieurs types de contraintes :

- contraintes géométriques, associées aux surfaces appartenant à une même pièce,
- contraintes de contact, associées aux surfaces voisines appartenant à deux pièces en contact,
- contraintes d'assemblage, associées à deux surfaces quelconques appartenant à deux pièces différentes dans un assemblage.

Dans le cadre de notre étude des tolérances en conception, nous nous attardons sur les contraintes géométriques associées à une seule pièce mécanique.

##### **4.1.1 Contraintes géométriques et de contact**

En conformité avec la modélisation de surfaces présentée au chapitre 2, la surface

« réelle » ( $S_R$ ) est approximée par une surface de substitution. Celle-ci sera déplacée par rapport à la surface nominale par les TPD, les facteurs « perturbateurs ».

Dans la Figure 4.1 on identifie la surface associée  $S_1$ , déplacée par rapport à la surface nominale  $S_0$ , effet du TPD  $\{\tau\}_{O,R_0} = \{t_0, \omega_0\}$  réduit au point O, dans le référentiel  $R_0$ .

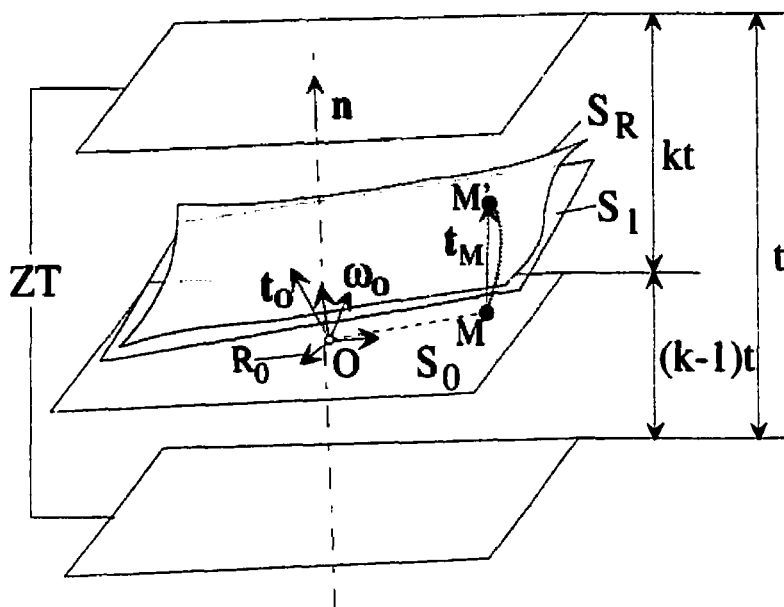


Figure 4.1: Contrainte géométrique associée à  $S_1$

Ainsi, un point M quelconque de la surface nominale  $S_0$  se retrouvera dans  $M'$ , sur  $S_1$ . Rappelons que les surfaces nominales sont des surfaces idéales par définition. Ce modèle utilise donc les surfaces de substitution, donc idéales, et ne prend pas en compte les défauts de forme.

La zone de tolérance ZT limite un domaine de l'espace autour de  $S_0$  dans lequel la surface de substitution  $S_1$  doit être comprise. Elle s'obtient par le décalage de la surface nominale  $S_0$  sur la direction normale  $\mathbf{n}$ , dans les deux sens :  $+(k-1)t$  et  $-kt$ , où  $0 \leq k \leq 1$ . La contrainte géométrique imposant que  $S_1$  soit dans la zone de tolérance ZT peut être présentée sous forme mathématique comme suit :

$$\forall M \in S_0 \text{ et } 0 \leq k \leq 1, (k-1)t \leq \mathbf{t}_{M,0} \cdot \mathbf{n} \leq kt, \text{ où} \quad (4.1)$$



$t_{M,0}$  est le déplacement du point M dans  $R_0$ .

$n$  est le vecteur unitaire normal à la surface nominale  $S_0$ , et orienté de manière à ce que la direction positive corresponde à l'extérieur de la matière.

Le déplacement de tout point M peut être exprimé en fonction des composantes du torseur  $\tau_0$  dans  $R_0$ , réduit au point O :

$$t_M = t_O + \omega_O \times OM \quad (4.2)$$

Si les composantes des vecteurs  $OM$  et  $n$  sont  $OM = [d_x, d_y, d_z]^T$  et  $n = [n_x, n_y, n_z]^T$ ,  $t_O = [t_x, t_y, t_z]^T$  et  $\omega_O = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ , alors en utilisant (4.2), la condition (4.1) devient :

$$(k-l)t \leq (t_x + \omega_y d_z - \omega_z d_y)n_x + (t_y + \omega_z d_x - \omega_x d_z)n_y + (t_z + \omega_x d_y - \omega_y d_x)n_z \leq kt \quad (4.3)$$

Les six composantes du TPD au point O dans  $R_0$  constituent les inconnues. Pour tout point de la surface  $S_0$  on peut trouver une condition (4.3). Si on considère  $n$  points de la surface nominale, on obtient un ensemble de  $n$  conditions caractérisant la contrainte géométrique induite par la zone de tolérance associée à la surface  $S_0$ .

Les contraintes de contact concernent des surfaces voisines appartenant à des objets différents pouvant former un assemblage. Les 13 contraintes présentées dans le tableau 2.1 résument la position relative des surfaces.

À partir du même raisonnement que celui appliqué à la contrainte géométrique sur la surface  $S_1$ , la spécification de contact peut être formalisée [TEI 99] par un ensemble similaire de contraintes de contact entre deux surfaces. Pour un contact plan/plan par exemple (Figure 4.2), correspondant à deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  nominalement parallèles à une distance  $d$  et associées à deux pièces, on considère les deux vecteurs unitaires normaux aux surfaces,  $z_1$  et  $z_2$ , orientés vers l'extérieur de la matière. Soit  $S$ , une surface de contact obtenue comme intersection entre  $S_1$  et  $S_2$  :

$$S = S_1 \cap S_2, \text{ avec } d = 0 \quad (4.4)$$

L'ensemble des contraintes de contact pour la surface plane  $S$  est dans ce cas :

$$\mathbf{z}_1 \times \mathbf{z}_2 = 0, \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 < 0 \quad (4.5)$$

La contrainte de positionnement est :

$$0 \leq d \leq D \quad (4.6)$$

avec  $D$  la limite supérieure de positionnement de la surface  $S$ .

Un contact permanent entre les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  implique  $D = d = 0$ . Si  $S$  n'est pas un plan, cette contrainte ne peut être définie et les conditions (4.5) ne sont pas vérifiées.

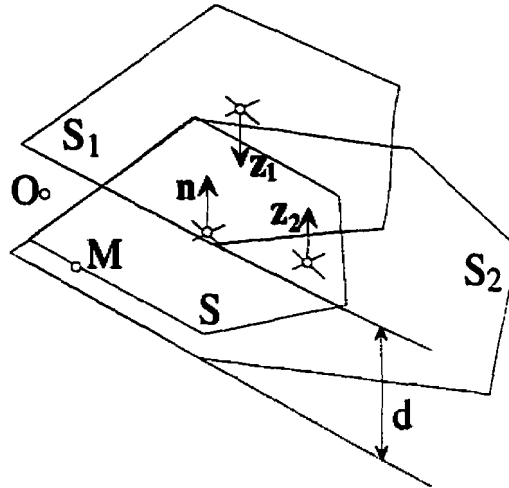


Figure 4.2: Contrainte de contact entre deux plans

Pour tout point  $O$  situé entre  $S_1$  et  $S_2$  où on connaît le TPD on a :

$$\forall M \in S, 0 \leq (\mathbf{t}_O + \boldsymbol{\omega}_O \times \mathbf{OM}) \cdot \mathbf{n} \leq D \quad (4.7)$$

Si l'axe  $z$  est perpendiculaire à  $S$ , on a  $\mathbf{n} = [0, 0, n_z]^T$  et (4.6) devient:

$$\forall M \in S, 0 \leq (t_z + \omega_x d_y - \omega_y d_x) n_z \leq D \quad (4.8)$$

Les contraintes de contact (4.8) traduisent en effet les trois degrés de liberté du joint appui plan.

### 4.1.2 Contraintes d'assemblage

On considère les contraintes d'assemblage comme des contraintes fonctionnelles concernant des surfaces appartenant à des objets différents.

Supposons un assemblage à " $p$ " pièces (Figure 4.3), et une contrainte fonctionnelle sur une surface de la pièce  $i$  et une surfaces de la pièce  $p$ . On note par  $S_{in}$ ,  $S_i$  et respectivement  $S_{pn}$ ,  $S_p$  les surfaces nominales et les surfaces de substitution associée aux pièces  $i$  et respectivement  $p$ . La position relative des surfaces  $S_i$  et  $S_p$  est une combinaison des spécifications géométriques et de contact des pièces composantes de l'assemblage.

Une formalisation de la contrainte fonctionnelle s'obtient ainsi du graphe de la Figure 4.3 en utilisant des relations similaires aux contraintes géométriques.

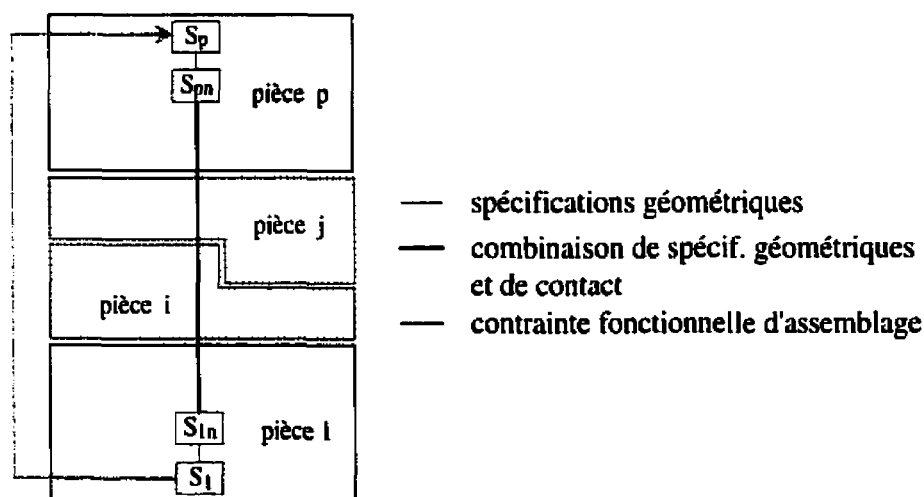


Figure 4.3: Graphe d'assemblage.

### 4.2 Représentation des zones de tolérance

Généralement, une zone de tolérance forme un domaine permis où peut se situer une

surface par rapport à une référence, cette dernière étant associée à une autre surface. L'association d'une référence complète à une surface fait parfois défaut. Dans ce cas, on emploie des EGRM associées aux SATT, comme le mentionne A. Rivière [RIVI 93].

Chaque type de tolérance imposée sur un dessin de définition établit une contrainte entre deux surfaces pouvant se traduire par un couple cinématique. Les degrés de liberté permis sont les composantes non nulles du TPD associé à ce mouvement de perturbation permis par la structure cinématique mise en place.

Giordano [GIO 93] a appelé ces TPD des *torseurs de déviation* dans le cas d'une spécification de tolérance associée à une pièce, ou *torseurs jeu* dans le cas d'un assemblage. Rivière [RIVI 93] a présenté dans sa thèse les 44 cas de tolérancement obtenus à partir des 28 cas d'association de SATT basés sur les sept classes de surfaces élémentaires considérées.

#### 4.2.1 Modes de représentation

La zone de tolérance s'exprime dans l'espace euclidien ou dans l'espace de déviation associé au TPD. Entre ces deux espaces, une correspondance permet d'utiliser les deux environnements pour représenter les zones de tolérance. Les torseurs de déviation appartiennent à un espace à 6 dimensions. Donc, si la dimension de l'espace de déviation (le nombre de composantes non nulles) excède 3, on pourrait représenter uniquement une projection de la ZT sur deux ou trois dimensions. Un autre mode de représentation est l'expression mathématique du système d'inéquations dans l'espace de déviation.

En conclusion, on peut considérer trois types de représentation des zones de tolérance :

- par une ZT dans l'espace euclidien

- par un domaine dans l'espace de déviation
- par un système d'inéquations

Notons qu'il est toujours possible d'exprimer une ZT de l'espace euclidien dans l'espace de déviation ou par un système d'inéquations. Par contre, il n'est pas toujours possible de trouver la ZT de l'espace euclidien correspondant à un domaine donné dans l'espace de déviation.

#### 4.2.2 Exemples de représentations des zones de tolérance

Les exemples suivants mettront en évidence cette triple représentation, ainsi que l'approche cinématique permettant d'établir les composantes de l'espace de déviation. Dans la Figure 4.4 il s'agit d'une tolérance de position et de parallélisme d'un cylindre par rapport à un plan.

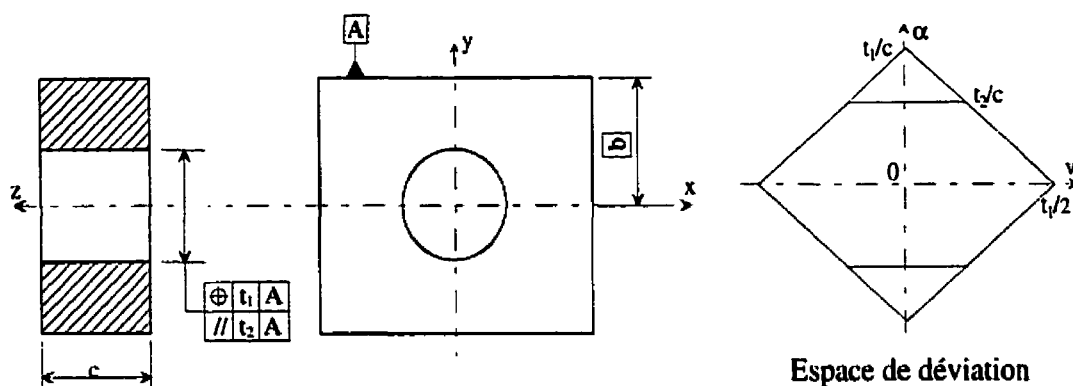


Figure 4.4: Tolérance géométrique d'un cylindre par rapport à un plan

Cette tolérance géométrique impose que l'axe du cylindre soit compris entre deux plans parallèles à la référence A, positionnés entre elles à une distance donnée par la valeur de la tolérance ( $t_1$ ). Ce type de tolérance active uniquement deux ddl dans l'espace de déviation : la rotation autour de l'axe x ( $\alpha$ ) et la translation au long de y ( $v$ ). La tolérance de parallélisme ( $t_2$ ) est une nouvelle contrainte restreignant la rotation autour de x à  $t_2/c$

(Figure 4.4). Le système d'inéquations associé au domaine dans l'espace de déviation est donné par les relations :

$$\begin{cases} -t_1 < \alpha c + 2v < t_1 \\ -t_1 < \alpha c - 2v < t_1 \\ -t_2 < \alpha c < t_2 \end{cases} \quad (4.9)$$

Le cas d'une tolérance de position d'un plan est présenté dans la Figure 4.5. Ici, on peut facilement identifier les ddl dans l'espace de déviation, associés au joint cinématique appui plan :  $u$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Les valeurs extrêmes des paramètres de déviation dépendent de la géométrie de la pièce limitant les déplacements permis. La ZT dans l'espace de déviation correspond ainsi à un octaèdre dont le volume enferme toutes les combinaisons possibles des déplacements. Deux plans parallèles à la référence A, dont la distance relative est  $t$ , limitent la ZT dans l'espace euclidien.

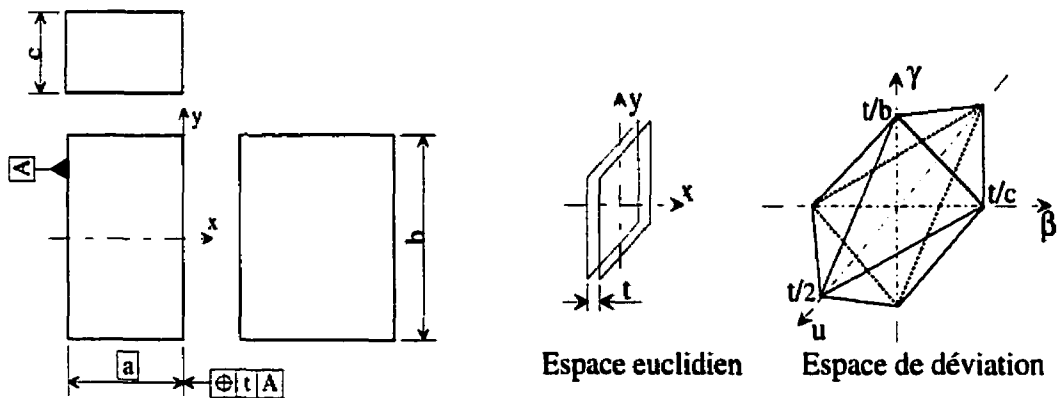


Figure 4.5: Tolérance de position pour un plan

La troisième forme de représentation est fournie par l'ensemble des inéquations définissant cet octaèdre dans l'espace de déviation :

$$\begin{cases} -t < \gamma b + \beta c + 2u < t \\ -t < \gamma b + \beta c - 2u < t \\ -t < \gamma b - \beta c + 2u < t \\ -t < \gamma b - \beta c - 2u < t \end{cases} \quad (4.10)$$

La tolérance de position d'un cylindre par rapport à un autre cylindre est présentée dans la Figure 4.6.

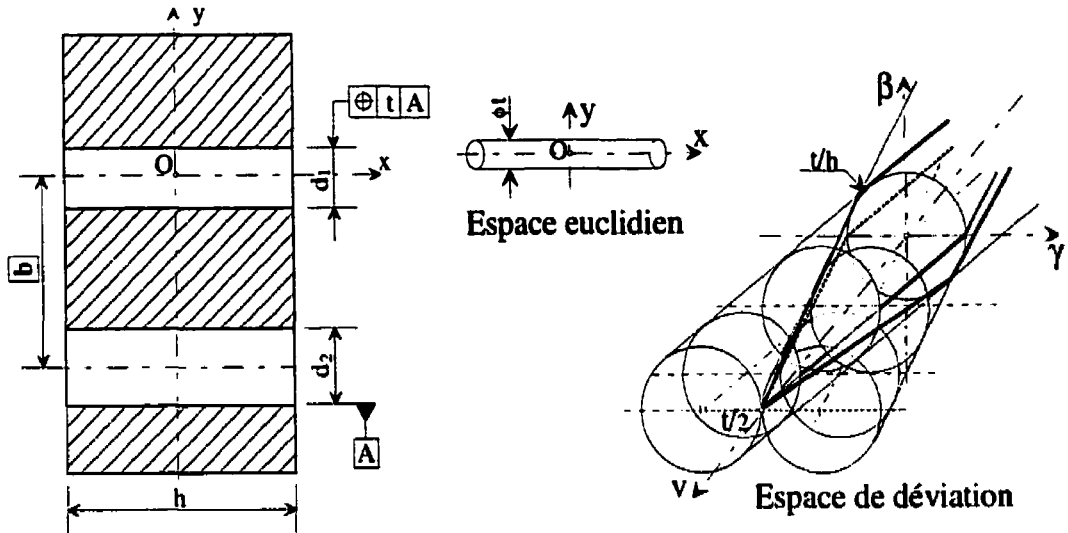


Figure 4.6: Tolérance de position entre deux cylindres

Les ddl actifs pour ce cas sont  $v$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ , et la ZT dans l'espace de déviation sera un volume complexe obtenu par l'intersection de deux cylindres de rayon  $t/h$  positionnés à un angle de  $2 \cdot \text{ArcTan}(2/h)$ . Un cylindre d'axe  $x$  et de diamètre  $t$  représente la ZT dans l'espace euclidien. Le système d'inéquations associé définit le volume dans l'espace de déviation :

$$\begin{cases} (v + \gamma \frac{h}{2})^2 + (\beta \frac{h}{2})^2 < (\frac{t}{2})^2 \\ (v - \gamma \frac{h}{2})^2 + (\beta \frac{h}{2})^2 < (\frac{t}{2})^2 \end{cases} \quad (4.11)$$

La résolution des systèmes d'inéquations quadratiques est difficile. On peut linéariser de tels domaines en le discrétisant par des polytopes. Cette nécessité s'accroît d'autant plus que la méthode proposée pour le calcul des zones de tolérances composées utilise une approche « convex hull » basée sur la résolution des systèmes des inéquations linéaires.

Pour ce dernier cas, par exemple, on peut approximer le cercle par un octogone régulier. Le domaine linéarisé équivalent sera un polyèdre défini par :

$$\left(\nu + \gamma \frac{h}{2}\right) \cos \theta + \beta \frac{h}{2} \sin \theta < \frac{t}{2} \quad (4.12)$$

avec :  $\theta = 2\pi \cdot i/8$ ,  $i=0..7$

Ainsi, pour chaque spécification de tolérance on pourra obtenir un polytope convexe dans l'espace de déviation.

#### 4.2.3 Variables de l'espace de déviation

La dimension maximale de l'espace de déviation est 6 et dépend du type des surfaces tolérancées. On utilise une formule de calcul [GIO 99] démontrée par Gaunet [GAU 94], permettant de déterminer la dimension de l'espace de déviation.

Considérons deux surfaces appartenant à une même pièce, une tolérancée par rapport à l'autre, et chacune ayant  $k_i$  mouvements invariants. De plus, la pièce possède elle-même son propre degré de liberté global  $m$ , c'est-à-dire qu'il y a  $(6-m)$  paramètres à choisir arbitrairement pour obtenir un référentiel. Dans ces conditions, la dimension de l'espace de déviation sera :

$$\nu_t = 6 - (k_1 + k_2) + m \quad (4.13)$$

où  $\nu_t$  est la dimension de l'espace de déviation, qui correspond au nombre maximal de variables à tolérer.

$k_1, k_2$ , degrés de liberté des deux surfaces.

$m$ , degré de liberté global de la pièce.

La dimension de l'espace de déviation égale le nombre des inconnues hyperstatiques obtenues par une analyse statique de la pièce. Le degré d'hyperstaticité d'un système mécanique se calcule par la différence entre le nombre des inconnues statiques et le rang



du système linéaire associé [BEN 96]. Supposant une pièce en équilibre sous l'action des forces externes, les inconnues sont les forces de contact pour chaque surface. Le rang du système associé est  $(6-m)$  et le nombre d'inconnues est  $(6-k_1)+(6-k_2)$ . On observe donc que le degré d'hyperstaticité égale la dimension de l'espace de déviation.

Ainsi, on associe un petit déplacement à une force hyperstatique inconnue et une petite rotation à un moment hyperstatique inconnu. Une telle analyse permet non seulement de calculer la dimension de l'espace de déviation, mais également d'identifier les variables qui y apparaissent. Par exemple, pour le cas de la Figure 4.6, le système des équations statiques possède 8 inconnues et le rang est 5. Une analyse statique nous montrerait l'impossibilité de calculer les forces sur l'axe  $y$  et les moments autour des axes  $y$  et  $z$ . En conséquence, les inconnues pour tolérancement (les ddl actives dans l'espace de déviation) seront  $v$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

Pour le cas présenté dans la Figure 4.4, la référence est un plan et la surface tolérancée est un cylindre. On a :  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 2$ ,  $m = 1$ , et on obtient  $vt = 2$ .

Dans le cas de la Figure 4.6, les deux surfaces sont des cylindres et on a :  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 2$ ,  $m = 1$ . Après calculs, on trouve la dimension de l'espace de déviation,  $vt = 3$ .

Il faut remarquer que le nombre de variables tolérancées peut être inférieur à la dimension de l'espace, car les contraintes fonctionnelles n'imposent pas toujours des tolérances sur toutes les composantes.

### 4.3 Polytopes

Les spécifications géométriques et les contraintes fonctionnelles se traduisent par un ensemble d'inéquations dont l'image forme un polytope. Ce dernier provient de l'intersection de demi plans.

Un ensemble  $P$  de  $\mathbb{R}^d$  est un polyèdre convexe de dimension  $d$  s'il représente l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires. Un polytope convexe ( $d$ -polytope) est un polyèdre convexe borné [FUK 00]. De façon usuelle, les polytopes convexes se nomment simplement polytopes.

Pour un sous-ensemble  $S$  de points de  $\mathbb{R}^d$ , le « convex hull »  $\text{conv}(S)$  est défini comme l'ensemble minimal de  $\mathbb{R}^d$  contenant  $S$ . Le calcul d'un « convex hull » signifie la détermination du  $\text{conv}(S)$  pour un ensemble fini de points  $S = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de  $\mathbb{R}^d$ . Le « convex hull » s'obtient généralement comme une intersection de demi-espaces :

$$\text{conv}(S) = \{x \mid Ax \leq b\} \quad (4.14)$$

où  $b$  est un vecteur,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

$A$  est une matrice,  $A \in \mathbb{R}^{m,d}$ .

Chaque inéquation non redondante du système correspond à une facette du  $\text{conv}(S)$ . Ainsi, le problème du « convex hull » est connu aussi comme le problème d'énumération de facettes. Certains auteurs désignent pour son calcul la détermination des points extrêmes du  $\text{conv}(S)$  ou l'équivalent, la détermination des points redondants de  $S$ . Ceci reste toutefois un problème plus simple que le problème initial du « convex hull ».

Une représentation graphique des polytopes devient possible si  $d \leq 3$ . Un point constitue un 0-polytope, un segment de droite donne un 1-polytope, un 2-polytope découle d'un polygone et un 3-polytope s'assimile à un polyèdre convexe.

#### 4.3.1 Somme de polytopes

Les zones de tolérance associées aux surfaces constituent des polytopes dans l'espace de déviation. La zone de tolérance composée associée à une surface cible formera un 6-polytope dans l'espace de déviation, obtenu comme somme de polytopes. La somme des

polytopes est formalisée mathématiquement par la somme de Minkowski de polytopes [GRI 93]. Cette opération bénéficie des propriétés de commutativité et d'associativité.

#### **4.3.2 Calcul du « convex hull »**

La méthode de calcul proposée utilise le 6-polytope résultant comme « générateur de perturbations » sur la surface cible. Un ensemble de points est engendré dans l'espace euclidien. Ces points appartiennent à la frontière de la zone de tolérance recherchée. La dernière étape de calcul de cette zone de tolérance composée est le calcul du 3-convex hull associé, dans l'espace euclidien.

Ce sujet est un problème ouvert de la géométrie algorithmique (*computational geometry*), une discipline scientifique née autour des années 1975. Depuis, ce domaine a connu un essor considérable et des intenses travaux de recherche se déroulent actuellement notamment aux États-Unis, Japon, Allemagne, France et Suisse.

Nous citons ici les recherches menées au Geometry Center, un Centre de Recherche Mathématiques de l'Université de Minnesota à Minneapolis, aux États-Unis. Ici a été réalisé Qhull, un logiciel multi-plateformes puissant permettant de calculer des « convex hulls », des triangulations de Delaunay et des diagrammes de Voronoï. Il est écrit en C à partir d'un algorithme original Quickhull, et gère de manière efficace les erreurs d'arrondi. Ce logiciel permet des calculs des « convex hull », de leurs volumes et surfaces dans des hyper-espaces allant jusqu'au 8-d.

Parmi d'autres recherches dans ce domaine nous signalons celles de Komei Fukuda du Département de Mathématique de l'Institut Fédéral Suisse de Technologie et celles de Wouter Meeussen d'un Centre de Recherches Appliquées en Belgique. Ce dernier a proposé ConvexHull, un programme Mathematica permettant de calculer des « convex

hull » en 3D, ainsi que le volume et la surface du polyèdre convexe. Ce programme a été mis sous forme de « package » par Eric Weisstein, le créateur de MathWorld.

Notre stratégie a été organisée sur deux directions : une première voie, exploitant le code C de Qhull à travers l'interface MathLink de Mathematica, et l'autre voie utilisant les « packages » Mathematica, moins performants et limités à 2D et 3D.

Nous avons concentré beaucoup d'efforts pour l'exploitation de Qhull et plusieurs avancées ont été possibles grâce aux contacts établis avec P.J.Hilton, responsable de MathLink chez Wolfram Research, et avec des membres de l'équipe du professeur B. Barber de l'Université de Minnesota, où Qhull a été développé. Toutefois, nous n'avons pas pu exploiter convenablement Qhull à partir de Mathematica. Plusieurs limitations concernant l'utilisation de ses options persistent encore, et demandent le développement de fonctions spéciales Template pour l'interface Mathlink. Dans ces conditions, nous avons exploité les « packages » Mathematica qui ont permis de valider notre programme de calcul pour les zones de tolérance composée (ZTC).

#### **4.4 Calcul de la zone de tolérance composée**

On retrouve souvent sur des pièces usinées certaines surfaces critiques où les spécifications de tolérance sont difficile à accomplir. Elles sont définies dans une chaîne de tolérances qui suit généralement la gamme de fabrication. La surface critique est une surface cible pour laquelle on évalue la zone de tolérance composée (ZTC), et on cherche les facteurs d'influence.

##### **4.4.1 Indice de zone de tolérance**

À chaque surface d'une chaîne de tolérances correspond une zone de tolérance simple (ZTS), y inclus pour la surface cible. Ces zones de tolérances peuvent être exprimées

dans l'espace euclidien ou dans l'espace de déviation.

Nous avons défini un indice, appelé indice de zone de tolérance (iZT), exprimé par :

$$iZT = \frac{V_{ZTc}}{V_{ZTs}} \quad (4.15)$$

où  $V_{ZTc}$  et  $V_{ZTs}$  représentent les volumes des zones de tolérance composée et respectivement simple dans l'espace euclidien, associés à une surface donnée.

Cet indice peut fournir une information quantitative concernant l'influence des autres tolérances de la chaîne sur la tolérance de la surface cible, où s'accumulent les effets des tolérances en amont. Le résultat dépend du positionnement relatif macrogéométrique des surfaces, de la nature des tolérances, ainsi que de la valeur des tolérances.

L'indice a une valeur supra unitaire. Plus les influences sont grandes, plus cette valeur augmentera. On pourrait donc imaginer une procédure d'optimisation d'une chaîne de tolérances en conception dont la fonction objectif serait de minimiser iZT.

#### 4.4.2 Méthode de calcul de la ZTC

Nous avons mis en place une méthode de calcul numérique, où le modèle CFAO de la pièce fournit toutes les informations de départ pour le calcul de la ZTC. Cependant, après avoir identifié la surface cible et la chaîne de tolérances associée, une analyse cinématique s'avère nécessaire. Il faut identifier les liaisons cinématiques associées aux surfaces, les degrés de liberté et les polytopes correspondant aux zones de tolérance simple dans l'espace de déviation.

Afin de pouvoir combiner tous les polytopes de la chaîne, on les discrétise en retenant plusieurs points sur la frontière, au moins les vertex. À chaque point correspond un TPD limite (valeurs extrêmes) qui entrera dans la combinaison. À partir de la géométrie de la

pièce, on obtient par calcul formel le torseur somme associé à la surface cible en utilisant un TPD agissant comme « facteur perturbateur » pour chaque surface.

On construit ainsi un tableau avec toutes les combinaisons des TPD considérés. Celui-ci fournira un ensemble de torseurs somme, image des « mouvements de perturbation ». Les TPD somme sont appliqués sur la surface nominale cible dans quelques points représentatifs. On obtient ainsi un nuage de points appartenant à la frontière de la ZTC, dans l'espace euclidien. Un algorithme de type « convex hull » est utilisé finalement pour obtenir une forme approximative de la ZTC, ainsi que son volume et sa surface.

Cette procédure peut être synthétisée en quatre étapes :

- Identification des tolérances et calcul des matrices de transport
- Détermination des polytopes dans l'espace de déviation et leur discrétisation
- Combinaison des polytopes et calcul des torseurs résultants sur la surface cible
- Application des torseurs résultants et calcul de la ZTC par « convex hull »

La succession de ces étapes est également illustrée dans le diagramme de la Figure 4.7.

Cet algorithme a été programmé en Mathematica<sup>®</sup> et validé. On a pu également quantifier les ZTC et obtenir leurs images graphiques dans l'espace euclidien. Un exemple de calcul sera présenté dans la section suivante.

Un programme conjoint, plus ambitieux, a été développé en parallèle dont le but était de permettre un traitement unitaire de plusieurs types de tolérances géométriques. On voulait également exploiter les capacités de calcul symbolique de Mathematica<sup>®</sup> pour la résolution des inéquations et le calcul des polytopes dans l'espace de déviation.

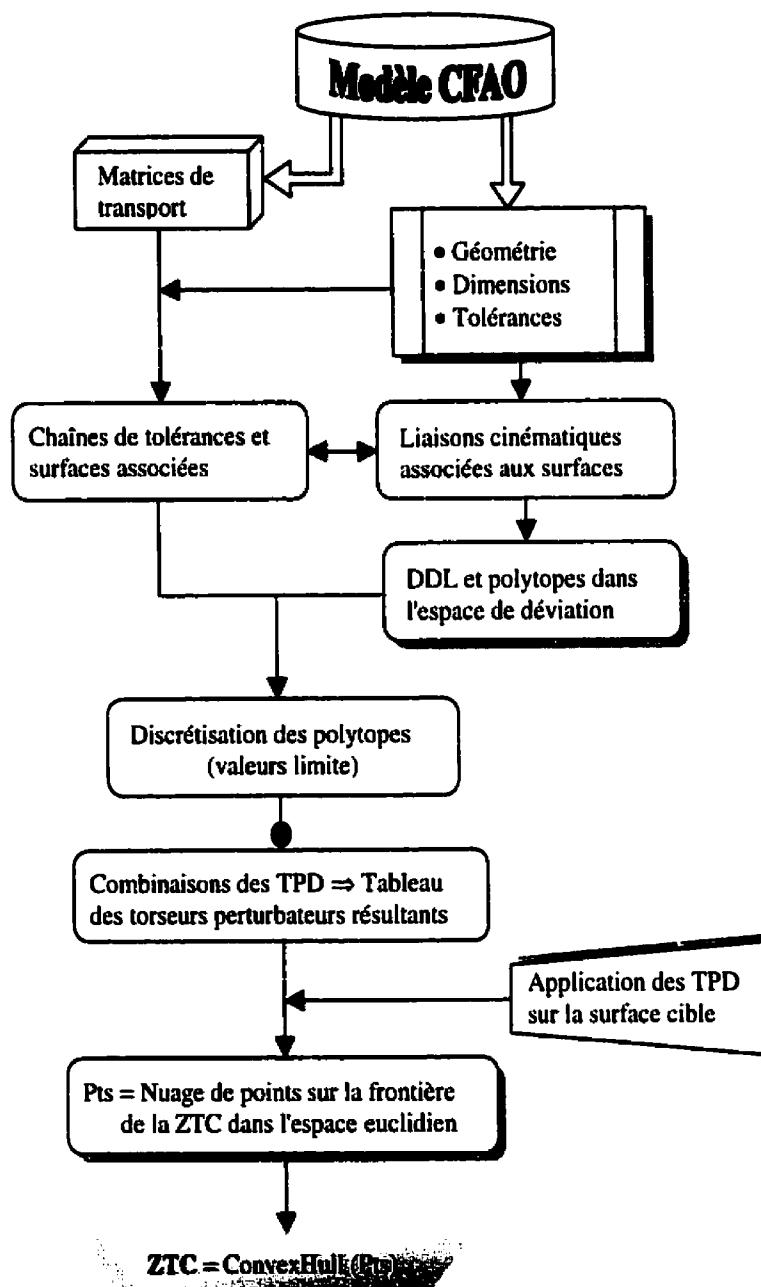


Figure 4.7: Méthode de calcul des zones de tolérance composée

Il devrait également automatiser des calculs et assurer un certain degré d'interactivité pour l'utilisateur. Un schéma du mode de traitement des tolérances est présenté dans la Figure 4.8.

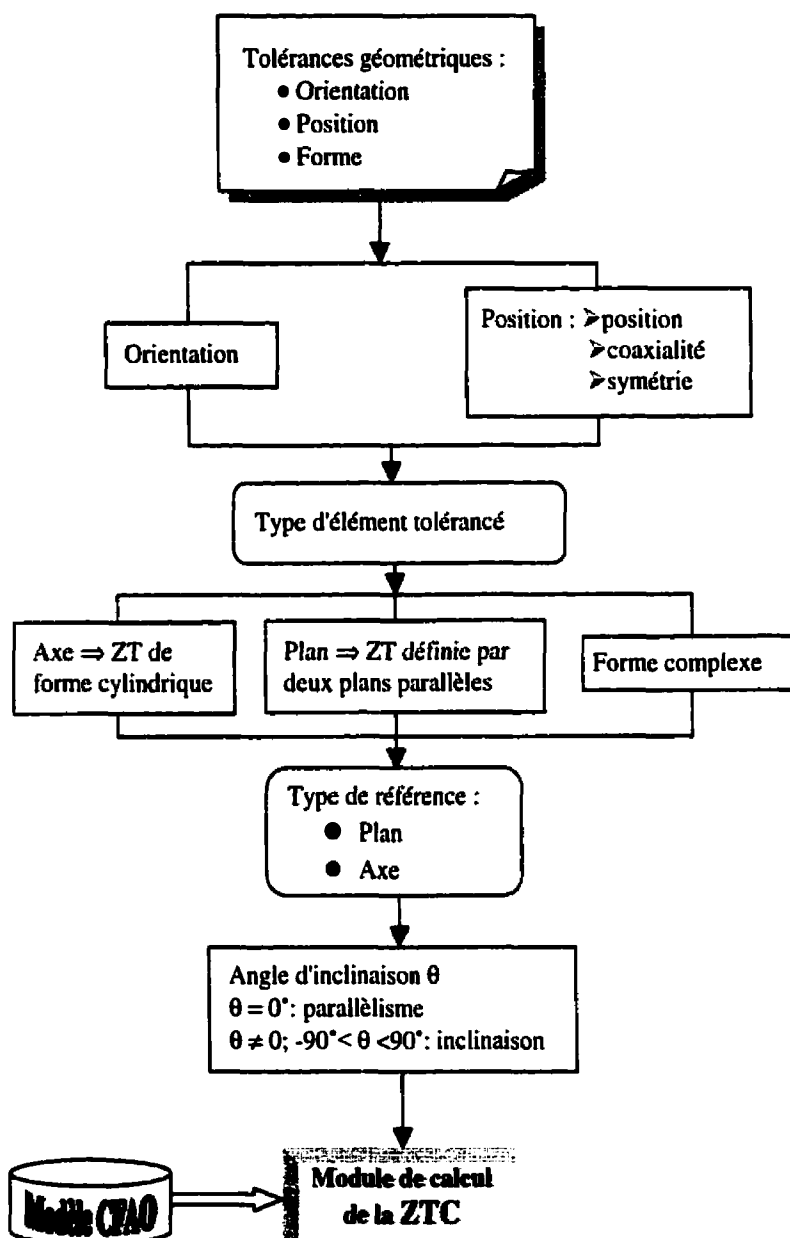


Figure 4.8: Traitement de plusieurs types de zones de tolérance

Pour le calcul de la zone de tolérance composée on fait appel à un module de calcul de la ZTC similaire à celui déjà présenté.



Plusieurs conventions ont été considérées comme :

**z**, direction normale pour un plan, ou axe de référence pour une surface de révolution.

**x**, direction de la perpendiculaire commune entre deux axes **z**, pour respecter le paramétrage de Denavit-Hartenberg.

Deux types de zones de tolérance ont été traités, celle définie par deux plans parallèles et celle définie par un cylindre, ainsi que la spécification de maximum de matière. Les inéquations mathématiques dans l'espace de déviation sont créées automatiquement, et le système obtenu est résolu en calcul formel. Plusieurs difficultés ont été surmontées, comme la contrainte de calcul symbolique concernant la rationalisation des coefficients, la linéarisation de formes quadratiques et la combinaison des variables formelles et numériques.

Le programme a été testé sur un exemple. Une validation approfondie pour toutes les branches de calcul serait nécessaire et des améliorations sont envisageables.

Le « package » Mathematica "ConvexHull3D" qui calcule la ZTC peut donner des erreurs quand le nombre de points augmente de façon considérable ou quand il y a des points très proches. À cet égard, des procédures de « filtrage » des points voisins ont été mises en place. Celles-ci ont donné de bons résultats.

#### 4.5 Application sur un exemple

La méthode de calcul des ZTC est mise en évidence sur un exemple. Il s'agit d'une pièce simple, un gabarit, dont le modèle CAO a été obtenu dans CATIA. Une image isométrique de la pièce est présentée dans la Figure 4.9 et les dessins de définitions correspondants dans la Figure 4.10.

L'alésage  $\phi 8^{+0.05}_0$  incliné à 30° doit être positionné de façon précise par rapport à la base

de la pièce. Cette surface cylindrique, de diamètre  $\phi 8$  et longueur 60, sera la surface cible. Les quatre principales étapes pour le calcul de la zone de tolérance composée associée au cylindre sont traitées dans les sections suivantes.

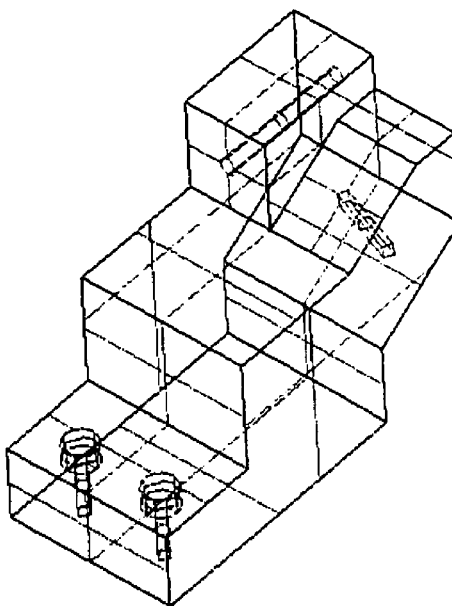


Figure 4.9: Gabarit (Exemple pour le calcul d'une ZTC)

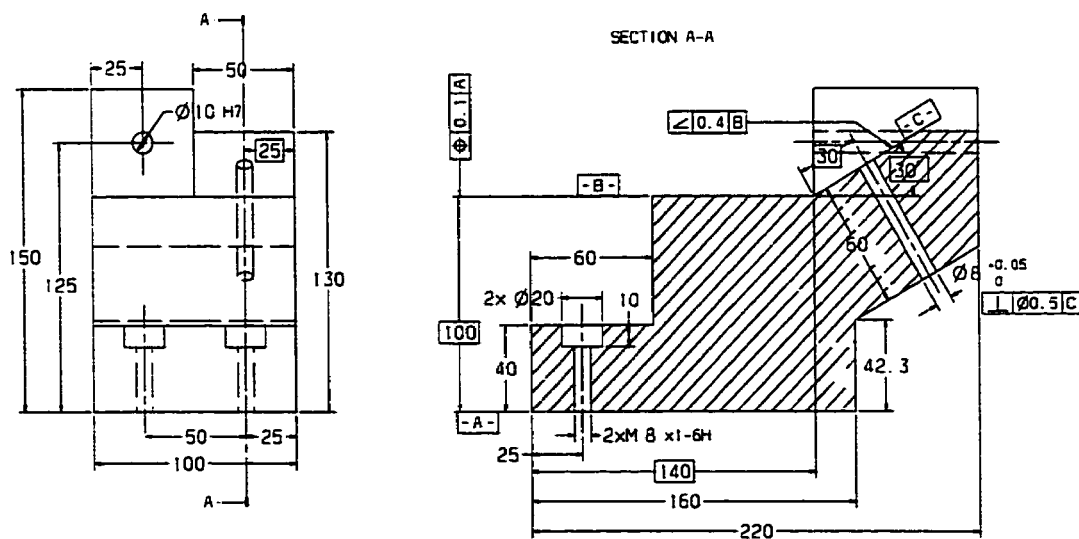


Figure 4.10: Dessins de définition de la pièce

#### 4.5.1 Identification des tolérances et matrices de transport

On peut identifier facilement la chaîne de tolérances qui précise les contraintes à respecter pour positionner la surface cible. Il s'agit d'une chaîne formée par :

- une tolérance de position  $\boxed{\oplus \mid t_1 \mid A}$  définissant la référence B, avec  $t_1 = 0.1$
- une tolérance angulaire d'orientation  $\boxed{\angle \mid t_2 \mid B}$  précisant la position du plan C par rapport à la référence B, avec  $t_2 = 0.4$
- une tolérance de perpendicularité  $\boxed{\perp \mid \phi_{t_3} \mid C}$  qui est une contrainte pour la surface cylindrique par rapport à la référence C, avec  $t_3 = 0.5$

Les surfaces tolérancées sont deux plans limités et un cylindre limité. Ces objets sont définis chacun par deux paramètres ( $a_1, b_1, \beta_2, h_2$  et respectivement  $d_3, l_3$ ), et sont présentés dans les figures 4.11, 4.12 et 4.13.

À chaque surface correspond un référentiel positionné dans le centre de symétrie et orienté convenablement. Les vecteurs de position et les angles de rotation (Bryant) sont utilisés pour construire une matrice  $\mathbf{RT}_{6,(n-1)}$  où  $n$  représente le nombre de surfaces de la chaîne. Cette matrice est un « input » pour un module de calcul Mathematica appelé "RTCMatrix". Celui-ci fournit tous les types de matrices de transport nécessaires dans le calcul, simples ou enchaînées.

Dans notre cas, la matrice  $\mathbf{RT}$  est :

$$\mathbf{RT} = \begin{bmatrix} \frac{a_1}{2} + \frac{h_2}{2} \cot(\beta_2) & 0 & \frac{h_2}{2} & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l_3}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.16)$$

où les paramètres sont particularisés conformément aux dessins de définition.

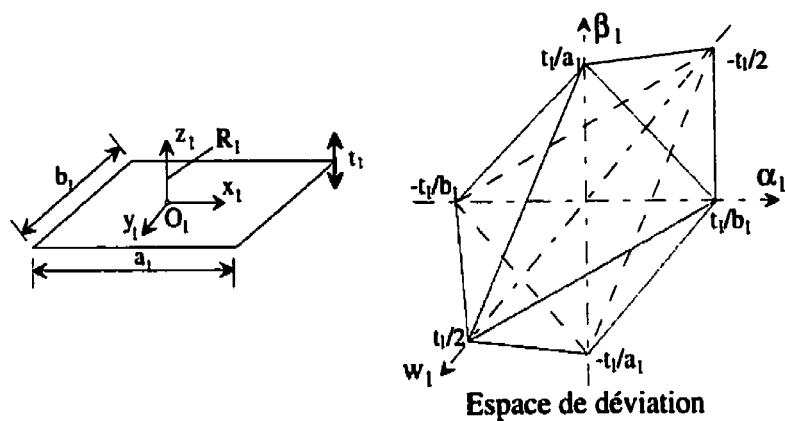


Figure 4.11: Première surface (plan): Tolérance de position

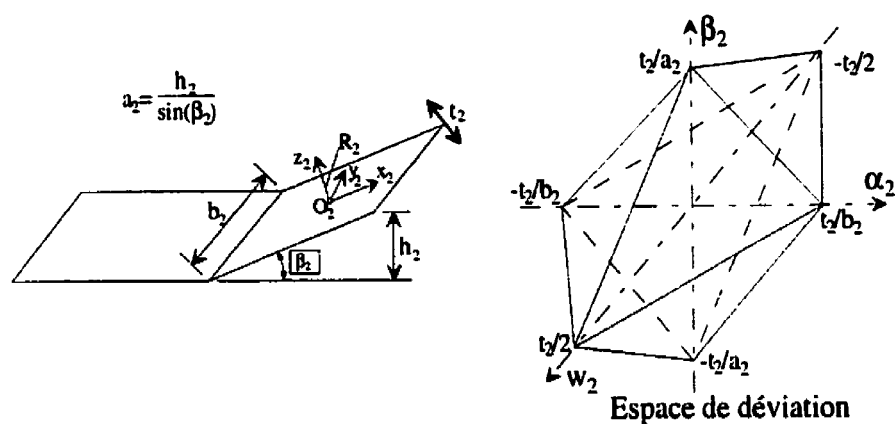


Figure 4.12: Deuxième surface (plan): Tolérance d'orientation

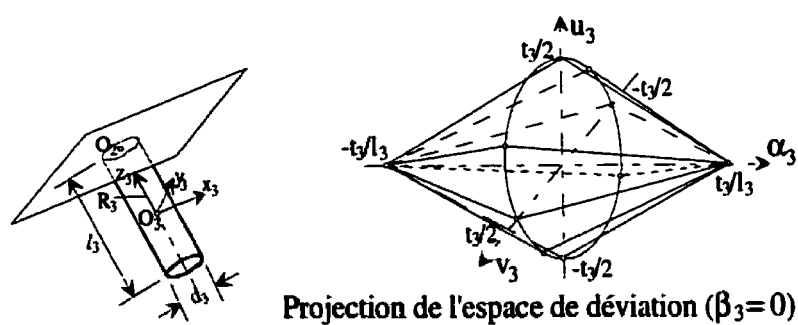


Figure 4.13: Troisième surface (cylindre): Tolérance de perpendicularité

#### 4.5.2 Polytopes dans l'espace de déviation

Des liaisons cinématiques appui plan et cylindrique sont associées aux surfaces considérées dans la chaîne de tolérances. Les ddl sont identifiés et les TPD sont définis avec les limites, permettant d'obtenir les zones de tolérances dans l'espace de déviation pour chaque surface (Figure 4.11, Figure 4.12 et Figure 4.13). Les TPD obtenus sont :

$$\tau_1 = [0, 0, w_1, \alpha_1, \beta_1, 0]^T \quad (4.17)$$

$$\tau_2 = [0, 0, w_2, \alpha_2, \beta_2, 0]^T \quad (4.18)$$

$$\tau_3 = [u_3, v_3, 0, \alpha_3, \beta_3, 0]^T \quad (4.19)$$

Les domaines sont discrétisés en considérant pour les octaèdres les sommets, et pour le troisième domaine les valeurs extrêmes de  $\alpha_3$  et  $\beta_3$ , ainsi qu'un octogone approximant le cercle dans le plan  $u_3v_3$ . Ce choix implique donc un nombre de  $6 \times 6 \times 12 = 432$  TPD distincts. Leurs combinaisons engendrent autant de torseurs résultants associés à la surface cible, la surface cylindrique.

#### 4.5.3 Combinaison de polytopes et torseurs résultants

L'expression du torseur somme résultant TS a été obtenue par calcul formel en utilisant les matrices de transport et les torseurs donnés par les relations (4.17) à (4.19) :

$$\mathbf{TS} = \begin{bmatrix} u_3 + 0.5w_1 - 50\beta_1 - 30\beta_2 \\ v_3 + 10.981\alpha_1 + 30\alpha_2 \\ 0.866w_1 + w_2 - 64.641\beta_1 \\ 0.866\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ -0.5\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Une procédure automatique permet de calculer toutes les combinaisons possibles des torseurs à partir des tableaux de valeurs limite considérées.

#### 4.5.4 Calcul de la zone de tolérance composée

Les torseurs résultants sont des « générateurs de perturbations » cumulant les effets des imprécisions accumulées le long de la chaîne fonctionnelle considérée. Calculés dans le référentiel  $R_3$ , au point  $O_3$ , ils sont appliqués à des points remarquables de la surface cible. Dans notre cas, les torseurs résultants sont appliqués sur les deux points extrêmes de l'axe du cylindre. On obtient ainsi deux nuages de points représentant les déplacements de ces points. Pour identifier le contour de la ZTC dans les plans  $z_3 = -l_3/2$  et  $z_3 = l_3/2$ , on a projeté les points sur ces plans. Après avoir éliminé les points multiples, on a obtenu les déplacements et les contours (Figure 4.14 et Figure 4.15) dans les deux plans en utilisant des fonctions « convex hull ».

Afin de représenter la ZTC tridimensionnelle, les points appartenant aux frontières ont été interpolés. On a calculé également, par intégration numérique, la longueur des contours et les surfaces correspondantes :

$$\text{long}_{\text{ct.inf}} = 4.527 \text{ mm}, \text{ surf}_{\text{inf}} = 1.513 \text{ mm}^2 \text{ et}$$

$$\text{long}_{\text{ct.sup}} = 1.687 \text{ mm}, \text{ surf}_{\text{sup}} = 0.217 \text{ mm}^2$$

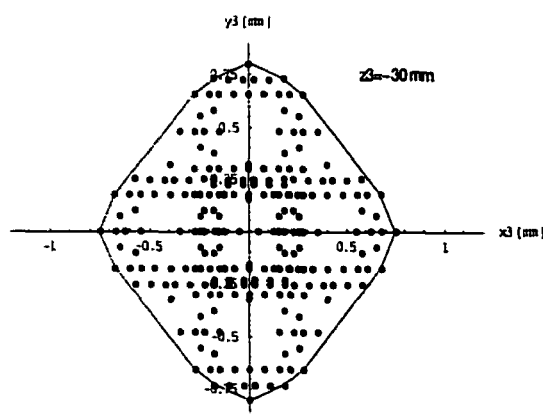


Figure 4.14: Plan inférieur de la ZTC

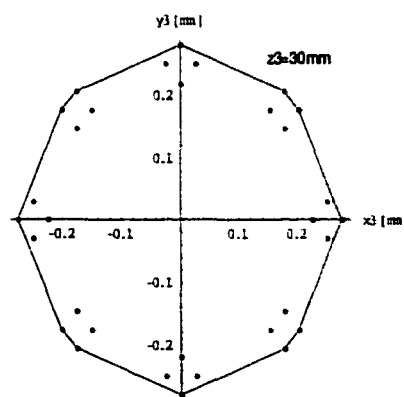


Figure 4.15: Plan supérieur de la ZTC

Des points équidistants obtenus comme solutions des équations intégrales ont servi à identifier les contours de la ZTC (Figure 4.16 et Figure 4.17).

La ZTC tridimensionnelle a été finalement construite dans le référentiel propre à la surface cylindrique (Figure 4.18 et Figure 4.19). Elle est une surface réglée basée sur les deux contours. Son volume a été calculé ( $V_{Zc}$ ), et comparé à celui de la zone de tolérance cylindrique simple ( $V_{Zs}$ ) :

$V_{Zc} = 46.063 \text{ mm}^3$  et  $V_{Zs} = 11.781 \text{ mm}^3$ , d'où l'indice iZT :

$$iZT = 3.91 \quad (4.21)$$

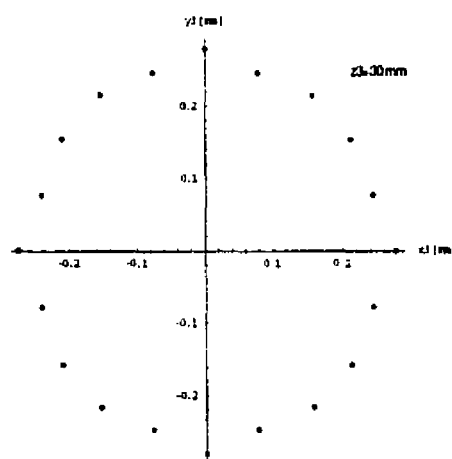
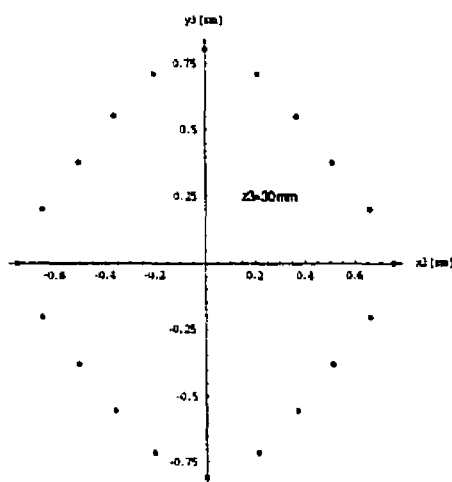


Figure 4.16: Points équidist. (contour inf.)      Figure 4.17: Points équidist. (contour sup.)

La valeur de l'indice montre que la ZTC est presque quatre fois plus grande que la zone de tolérance élémentaire associée à la surface cylindrique cible. Celui-ci indique l'influence des contraintes de tolérance situées en amont. Il peut servir à optimiser une chaîne de tolérances en design, afin de minimiser l'influence des tolérances impliquées sur une surface cible.

Les contours obtenus dans des plans d'intérêt ainsi que l'image de la ZTC servent également à identifier l'effet cinématique sur la surface cible des écarts des surfaces formant la chaîne des tolérances. Là où les déplacements sont plus grands il y a un risque plus élevé d'écarts par rapport à la position nominale. On peut donc estimer à l'avance les régions où ces écarts sont plus grands, ce qui est très intéressant de point de vue fonctionnel.

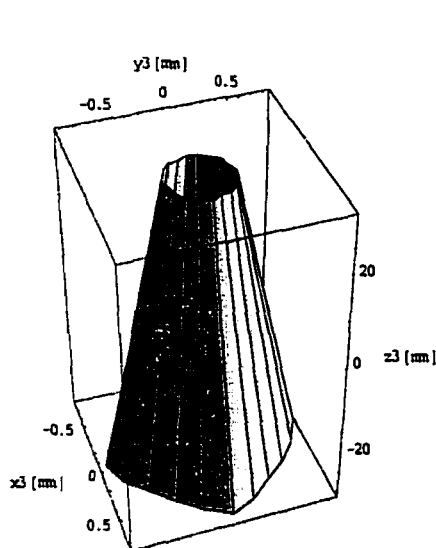


Figure 4.18: Image 3D de la ZTC

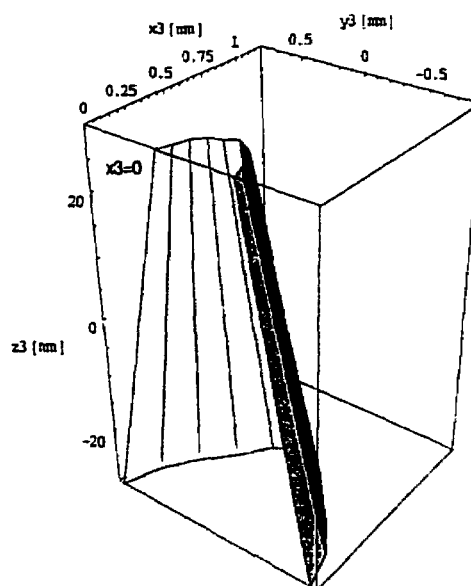


Figure 4.19: Section de la ZTC

Dans notre cas, on estime que la partie inférieure de l'alésage a plus de chances de s'écarter de la position nominale. D'ici on déduit les impacts fonctionnels, quant au montage par exemple. Plusieurs types d'interpolation ont été investigués (polynomiales, spline, Bézier). Des ellipses équivalentes ont été calculées, pour approximer les contours dans les plans limite.

Des modules "ConvexHull3D" permettent de traiter le nuage de points 3D généré par les torseurs résultants et obtenir directement les points situés sur la frontière de la ZTC, ainsi que le polyèdre convexe approximant la ZTC. Cette méthode fait appel à des algorithmes de calculs laborieux et peut donner des erreurs si le nombre de points est très élevé ou s'il y a des points très proches. Toutefois, des résultats consistants ont été obtenus en utilisant un « package » Mathematica<sup>®</sup> ayant recours à un tel algorithme.

Cette méthode originale d'évaluation des zones de tolérance composée devient un outil efficace pour l'analyse et l'optimisation des tolérances en design.



## CONCLUSION

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire traitent un problème qui joue un rôle clef dans le succès des programmes d'ingénierie : le tolérancement, essentiel pour définir la géométrie d'une pièce mécanique assurant une bonne précision et sa fonctionnalité dans un assemblage.

Nous avons mis en place des méthodes originales d'analyse tridimensionnelle de tolérances en design et en fabrication. Elles permettent de valider une gamme de fabrication, d'identifier les paramètres dont l'influence est prépondérante pour une tolérance cible ou de calculer en design une zone de tolérance composée.

Nous avons synthétisé d'abord les principaux éléments impliqués dans le tolérancement en design et fabrication, dont l'interrelation s'accroît dans la démarche actuelle d'ingénierie simultanée. Après avoir mis en évidence le couplage permanent entre dimensions et tolérances, nous avons présenté les principales hypothèses d'analyse et les outils de calcul.

Le modèle de simulation en fabrication employé repose sur la similitude existante entre les surfaces usinées et les pièces d'un mécanisme. Les chaînes cinématiques contenant les surfaces de substitution sont construites suivant la chronologie de la gamme de fabrication. Nous avons proposé un graphe de gamme incluant les dispersions de procédés, les erreurs des machines-outils et les mises en référence. Le code de simulation développé à partir de la méthode a été validé sur des exemples de type industriels. Basée sur le calcul formel, une étude importante concernant la sensibilité des différentes spécifications de tolérance a été réalisée. Ses conclusions permettraient aux ingénieurs de procédés d'identifier les paramètres essentiels qui influencent les tolérances critiques. Le développement de la base de données des erreurs machines-

outils et des dispersions de procédés demeure nécessaire. L'intégration dans des outils CFAO est conditionnée par l'automatisation de procédures de calcul dont la difficulté est due à la complexité multifactorielle du problème.

L'étude tridimensionnelle des tolérances en conception se proposait d'évaluer la zone de tolérance composée, un indicateur de l'influence des tolérances composantes dans une chaîne de dimensions et tolérances. Les contraintes entre surfaces ont été formalisées, et différents types de représentations des zones de tolérances ont été exposés. La méthode de calcul mise en place utilise une approche cinématique, où des liaisons cinématiques et des polytopes dans l'espace de déviation sont associées aux surfaces considérées. Les combinaisons des torseurs de petit déplacement construits à partir des polytopes discrétisés engendrent des torseurs résultants sur la surface cible. Ils agissent comme générateurs de perturbations appliquées à la surface nominale cible. Des algorithmes de type « convex hull » permettent de traiter les déplacements résultants et de calculer les zones de tolérances composées. Nous avons introduit l'indice de zone de tolérance. Il fournit une information quantitative sur l'influence des autres tolérances de la chaîne sur la tolérance associée à la surface cible, permettant de réaliser une procédure d'optimisation d'une chaîne de tolérances.

Cette méthode pourrait être considérée à terme pour le développement d'un outil de tolérancement assisté par ordinateur, si on arrive à traiter de façon automatique plusieurs types de tolérances et que l'on construit une interface avec des modeleurs CAO existants.

## RÉFÉRENCES

- [ASME 94] American Society of Mechanical Engineers (1994). ASME Y14.5M-1994, *Dimensioning and Tolerancing*, An ASME National Standard.
- [BJO 78] Bjorke O. (1978). *Computer-Aided Tolerancing*, Tapir Publishers, Norway.
- [BAL 90] Ballu A., Bourdet P., Mathieu L. (1990). *Rapport du contrat no. 8912*, LURPA, ENS de Cachan, France.
- [BAL 93] Ballu A., Mathieu L. (1993). Analysis of dimensional and geometrical specifications: standards and models, *CIRP Computer Aided Tolerancing 3<sup>rd</sup> Int. Seminar*, Cachan, France, p. 157-170.
- [BAL 95] Ballot E. (1995). *Lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement*, Thèse, Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée, École Normale Supérieure de Cachan, France.
- [BAL 97] Ballot E., Bourdet P. (1997). A computational method for the consequences of geometrical errors in mechanisms, *CIRP Computer Aided Tolerancing 5<sup>th</sup> Int. Seminar*, Toronto, Canada, p. 137-148.
- [BEN 96] Benea R. (1993). *Contribution à l'étude des robots pleinement parallèles de type 6 R-RR-S*, Thèse, Laboratoire de Mécanique Appliquée, Université de Savoie, France.
- [BOU 73] Bourdet P. (1973). *Chaîne de cotes de fabrication - Première partie : Modèle*, L'ingénieur et le technicien de l'enseignement technique, France, p. 23-45.

- [BOU 75] Bourdet P. (1975). *Chaîne de cotes de fabrication - Deuxième partie : Mode opératoire*, L'ingénieur et le technicien de l'enseignement technique, France, p. 15-23.
- [BOU 88] Bourdet P., Clément A. (1988). A study of optimal-criteria identification based-on the small-displacement screw model, *Annals of the CIRP*, Vol.37, p. 503-506.
- [BOU 96] Bourdet P. et al. (1996). The Concept of the Small Displacement Torsor in Metrology, *Advanced Mathematical Tools in Metrology II, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, Vol.40, p. 110-122.
- [CHA 96] Chase K.W. et al. 1996). Including geometric feature variations in tolerance analysis of mechanical assemblies, *IIE Transactions 1996*, Vol.28, p. 795-807.
- [CHE 00] Chevalier B., Mathieu L. (2000). Expressing nominal geometry and geometric specifications with an unique model: Geospelling, *3<sup>rd</sup> International Conference IDMME*, Montréal, Canada.
- [CLE 91] Clement A., Desrochers A., Riviere A. (1991). Theory and practice of 3-D tolerancing for assembly, *CIRP Computer Aided Tolerancing 2<sup>nd</sup> Int. Seminar*, Penn State, p. 25-55.
- [CLE 95] Clement A., Riviere A., Serre P. (1995). A declarative information model for functional requirements, *CIRP Computer Aided Tolerancing 4<sup>th</sup> Int. Seminar*, Tokyo, p. 3-16.

- [CLE 97] Clement A. et al. (1997). The TTRS: 13 Constraints for Dimensioning and Tolerancing, *CIRP Computer Aided Tolerancing 5<sup>th</sup> Int. Seminar*, Toronto, Canada, p. 73-81.
- [DANa 00] Dantan J-Y., Thiebaut F. (2000). Functional and Manufacturing Specifications-Part 1: Geometrical expression by Gauge with Internal Mobilities, *3<sup>rd</sup> International Conference IDMME*, Montréal, Canada.
- [DANb 00] Dantan J-Y., Thiebaut F. (2000). Functional and Manufacturing Specifications-Part 2: Validation of a Process Plan, *3<sup>rd</sup> International Conference IDMME*, Montréal, Canada.
- [DES 97] Desrochers A., Rivière A. (1997). A Matrix Approach to the Representation of Tolerance Zones and Clearances, *Int. Journal of Advanced Manufacturing Technology*, Vol.13, p. 630-636.
- [ETE 88] Etesami F. (1988). Tolerance verification through manufacturing part modelling, *Journal of Manufacturing Systems*, 7, p. 223-232.
- [ETE 93] Etesami F. (1993). A mathematical model for geometric tolerances, *Journal of Mechanical Design*, Vol.115, p. 81-86.
- [FAR 86] Farmer L., Galdman C. (1986). Tolerance technology – computer based analysis, *Annals of the CIRP*, Vol.35 No. 1, p. 7-10.
- [FUK 00] Fukuda K., (2000). *Convex Polyhedron*, Department of Mathematics, Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne,  
<http://www.ifor.math.ethz.ch/~fukuda/polyfaq/node3.html>.

- [GAU 93] Gaunet D. (1993). Vectorial tolerancing model, *CIRP Computer Aided Tolerancing 3<sup>rd</sup> Int. Seminar*, Cachan, France, p. 25-50.
- [GIO 93] Giordano M., Duret D. (1993). Clearance Space and Deviation Space, *CIRP Computer Aided Tolerancing 3<sup>rd</sup> Seminar*, ENS Cachan, France, p. 179-196.
- [GIO 99] Giordano M., Pairel E., Samper S. (1999). Mathematical representation of Tolerance Zones, *CIRP Computer-Aided Tolerancing 6<sup>th</sup> Int. Seminar*, University of Twente, Netherlands, p. 177-186.
- [GRI 93] Gritzmann P., Sturmfels B. (1993). Minkowski addition of polytopes : computational complexity and application to Gröbner basis, *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, Vol.6 No. 2, p. 246-269.
- [HER 76] Hervé J.M. (1976). *La géométrie du groupe des déplacements appliquée à l'analyse cinématique des mécanismes*, State Doctorale Thesis, Paris VI.
- [HIL 78] Hillyard C., Braid I. (1978). Analysis in dimensions and tolerances in computer-aided mechanical design, *Computer-Aided Design*, Vol.10 No. 3, p. 161-166.
- [IND 99] Études-Méthodes-Contrôle, (1999). *Revue Industries et Techniques*, France, no. 802, mars 1999, p. 76-79.
- [JAY 89] Jayaraman R., Srinivasan V. (1989). Geometric Tolerancing I: Virtual Boundary Requirements, *IBM Journal of Research and Development*, Vol.33, p. 90-104.
- [KOS 85] Kosilova A., Mesheriakov R. et al. (1985). *The technologist handbook*, Mashinostroenie Publ. House, Moscow, 4<sup>th</sup> edition, Vol.1, Chapter 1: Machining precision for mechanical parts, p. 6-88.

- [LAF 99] Lafond P., Laperrière L. (1999). Jacobian-based Modeling of Dispersions Affecting Pre-Defined Functional Requirements of Mechanical Assemblies, *Proceedings of the 1999 IEEE Int. Symposium on Assembly and Task Planning*, Porto, Portugal, p. 20-25.
- [LEG 99] Legoff O., Villeneuve F., Bourdet P. (1999). Geometrical tolerancing in process planning: a tridimensional approach, *Proceedings of the Inst. of Mechanical Engineers Part B*, Vol.233, p. 635-640.
- [LEP 99] Le Pivert P., Rivière A. (1999). Towards realistic simulation of machining processes, *CIRP Computer-Aided Tolerancing 6<sup>th</sup> Int. Seminar*, University of Twente, Netherlands, p. 55-62.
- [MAT 97] Mathieu L., Clement A., Bourdet P. (1997). Modelling, representation and processing of tolerances, tolerances inspection: A survey of current hypothesis, *CIRP Computer Aided Tolerancing 5<sup>th</sup> Int. Seminar*, Toronto, Canada.
- [PAH 97] Pahk H., Kim Y., Moon J. (1997). A new technique for volumetric error assesment of CNC machine-tools incorporating ball bar measurement and 3D volumetric error model, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, Vol.37, p. 1583-1596.
- [REQ 77] Requicha A. (1977). Mathematical models of rigid solide objects, *Technical Memo 28 Production Automation Project*, University of Rochester, USA.
- [REQ 84] Requicha A. (1984). Representation of tolerances in solide modeling: issues and alternatives approaches, *Solide modeling by computer*, p. 3-19.
- [REQ 86] Requicha A., Chan S. (1986). Representation of geometric features, tolerances

and attributes in solid modelers based on constructive geometry, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, RA-2, p. 156-166.

- [RIV 93] Rivest L., Fortin C., Desrochers A. (1993). Tolerance modelling for 3D analysis: Presenting a kinematic formulation, *CIRP Computer Aided Tolerancing 3<sup>rd</sup> Int. Seminar*, Cachan, France, p. 51-73.
- [RIV 94] Rivest L., Dupinet E., Fortin C., Morel C. (1994). Analysis of Product Tolerances for Process Plan Validation, *Manufacturing Review*, Vol.7 No.4, p. 312-331.
- [RIV 93] Rivière A. (1993). *La géométrie du groupe des déplacements appliquée à la modélisation du tolérancement*, Thèse, Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction Mécanique, École Centrale de Paris, France.
- [ROY 91] Roy U., Liu C., Woo T. (1991). Review of dimensioning and tolerancing: representation and processing, *Computer-Aided Design*, Vol.23, p. 466-483.
- [ROY 99] Roy U., Li B. (1999). Representation and interpretation of geometric tolerances for polyhedral objects. II. Size, orientation and position tolerances, *Computer-Aided Design*, Vol.31, p. 273-285.
- [SAL 97] Salomons O.W. (1997). Current Status of CAT Systems, *CIRP Computer Aided Tolerancing 5<sup>th</sup> Int. Seminar*, Toronto, Canada, p. 345-359.
- [SRI 89] Srinivasan V., Jayaraman V. (1989). Geometric Tolerancing II: Conditional tolerances, *IBM Journal of Research and Development*, Vol.33, p. 105-124.
- [SRI 93] Srinivasan V. (1993). Role of sweeps in tolerancing semantics, *Proceedings of the 1993 Int. Forum on Dimensional, Tolerancing and Metrology*, Dearborn,



Michigan, 1993 June 17-19, CRTD – Vol. 27, p. 69-78.

- [SRI 97] Srinivasan V. (1997). ISO deliberates Statistical Tolerancing, *CIRP Computer Aided Tolerancing 5<sup>th</sup> Int. Seminar*, Toronto, Canada, p. 25-35.
- [TEI 99] Teissander D., Delos V., Couetard Y. (1999). Operations on polytopes: application to tolerance analysis, *CIRP Computer-Aided Tolerancing 6<sup>th</sup> Int. Seminar*, University of Twente, Netherlands, p. 425-434.
- [TUR 87] Turner J., Wozny M. (1987). Tolerances in computer-aided geometric design, *Visual computer*, Vol.3 No.4, p. 214-226.
- [TUR 93] Turner J. (1993). A feasibility space approach for automated tolerancing, *Journal of Engineering for Industry*, Vol.115, p. 341-346.
- [VIL 00] Villeneuve F., Legoff O., Geiskopf F. (2000). Quantification tridimensionnelle des défauts de fabrication pour l'analyse et la synthèse de tolérances, *3<sup>rd</sup> International Conference IDMME*, Montréal, Canada.
- [WIR 89] Wirtz A. (1989). Vectorial tolerancing, *The International Conference on CAD/CAM and AMT*, Jerusalem, Vol. II.
- [WHI 94] Whitney D., Gilbert O. (1994). Representation of geometric variations using Matrix transforms for Statistical Tolerance Analysis in assemblies, *Research in Engineering Design*, Vol.6, p. 191-210.
- [WIR 91] Wirtz A. (1991). Vectorial tolerancing for production quality control and functional analysis in design, *CIRP Computer Aided Tolerancing 2<sup>nd</sup> Int. Seminar*, PennState, p. 77-84.